Chapitre 1

Propriétés globales des systèmes non-linéaires

Dans ce cours on s'intéresse a l'étude des systèmes autonome de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1.1}$$

Lorsque f est une fonction non linéaire on dit que le système est non linéaire. Les systèmes non linéaires sont très complexes et en générale on ne peut pas trouver les solutions de manière explicite, donc on ne fait que des études qualitatives. Mais d'autre part, le rang des comportements dynamiques valable pour ces systèmes et plus grand que pour les systèmes linéaires (c'est pour cela que les systèmes non linéaires sont très intéressants).

1.1 Flot

D'après le théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz, si f est de classe C^1 alors il existe une solution maximale unique $x(t)$ au système (1.1) telle que $x(0) = x_0$.

Définition 1.1.1. *La correspondance $\phi_t : x_0 \longmapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t, qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du champ de vecteurs f.*
Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale x :

$$(t, x) \longmapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t).$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in]-\infty, +\infty[$.

FIGURE 1.1 – Représentation du flot

Remarque 1.1.
1- (Régularité du flot)
Si f est de classe C^k le flot est lui-même de classe C^k.

2-(Transitivité du flot)
Le flot vérifie, pour tous t et $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}.$$

3- Pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$, le flot est donné par

$$\phi_t(x) = e^{tA}x.$$

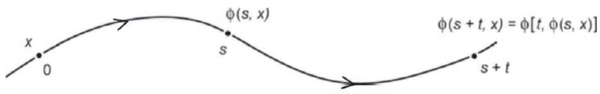


FIGURE 1.2 – Transitivité du flot

1.2 Trajectoire (Orbite), portrait de phase

Soit $x_0 \in U$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de (1.1) passant par x_0. L'ensemble des points $x(t, x_0), t \in \mathbb{R}$ est appelé la trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état, passant par le point x_0 à l'instant initiale $t = 0$, on la note par

$$\gamma_{x_0} = \{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque 1.2. *La trajectoire d'un système dynamique autonome ne dépend que de l'état initiale.*

On distingue éventuellement l'orbite positive $\gamma_{x_0}^+ = x(t), t \geq 0$ et l'orbite négative $\gamma_{x_0}^- = x(t), t \leq 0$ passant par le point $x(0) = x_0$.
Le portrait de phase du champ de vecteurs f est la partition de l'ouvert U en les orbites figure().
L'analyse qualitative a pour objet d'étudier les caractéristiques géométriques du portrait de phase.

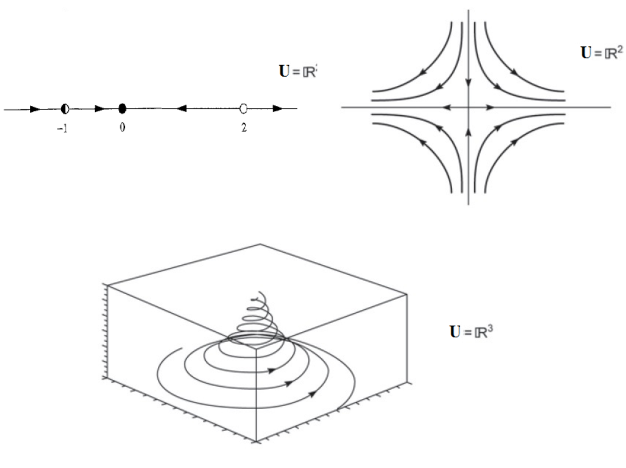


FIGURE 1.3 – Trois portraits de phase

1.3 Points d'équilibre

1. Un point a est dit point d'équilibre de (1) s'il satisfait $F(a) = 0$ (ou pour tout t, $\phi(t, a) = a$) sinon on dit que a est un point ordinaire. De la définition on déduit que l'orbite d'un point d'équilibre est réduite au point lui même : $\gamma_{x_0}^- = x_0$. Par contre l'orbite d'un point ordinaire est une courbe lisse qui admet en chacun de ses points le vecteur f comme vecteur tangent. Parmi les points ordinaires on distingue les points périodiques et les points récurrents.
2. Un point ordinaire a est dit périodique s'il existe $T > 0$ tq $\phi(T, a) = a$.
3. Un point ordinaire et non périodique a est dit récurrent si pour tout voisinage V de a et tout $T \in R$ il existe $t > T$ tq $\phi(t, a) \in V$.
4. Une orbite γ_{x_0} telle qu'il existe deux points équilibre a et b vérifiant :
$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x_0) = a \text{ et } \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x_0) = b$$
est dite orbite hétérocline si $a \neq b$ et orbite homocline si $a = b$.

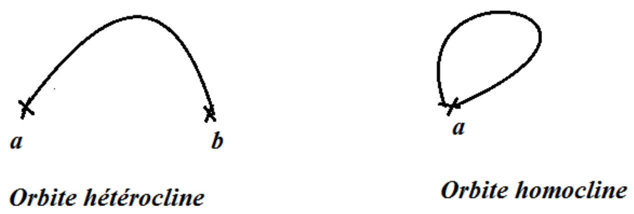


FIGURE 1.4 – Orbite hétérocline et orbite homocline

5. Un ensemble $S \subset U$ est dit invariant par le flot ϕ_t sur U (ou bien par le système $\dot{x} = f(x)$ correspondant) si pour tout $x \in S$ et tout $t \in R$ on a $\phi_t(x) \in S$. Si S vérifie la propriété que $\phi_t(x) \in S$ pour tout $x \in S$ et tout $t > 0$ alors on dit que S est positivement invariant.

1.4 Ensembles limites et attracteurs

1.4.1 Ensembles limites

Définition 1.4.1. *Un point $a \in U$ est un point ω-limite d'une trajectoire $\phi(., x_0)$ de* (1.1) *, s'il existe une suite $(t_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ tq $\lim_{n \to +\infty} \phi(t_n, x_0) = a$*

- *de même un point $b \in U$ est un point α-limite d'une trajectoire $\phi(., x_0)$ de (1.1) s'il existe une suite$(t_{(n)}) \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$ tq $\lim_{n \to +\infty} \phi(t_n, x_0) = b$*
- *l'ensemble de tout les points ω-limite d'une trajectoire γ_{x_0} est appelé ensemble ω-limite de γ_{x_0} et noté $\omega(\gamma_{x_0})$ ou $\omega(x_0)$*
- *l'ensemble de tout les points α-limite d'une trajectoire γ_{x_0} est appelé ensemble α-limite de γ_{x_0} et noté $\alpha(\gamma_{x_0})$ ou $\alpha(x_0)$*
- *l'ensemble $\omega(x_0) \bigcup \alpha(x_0)$ est appelé ensemble limite de γ_{x_0}*

Example 1.4.1. *Si le point c appartient à une orbite hétérocline alors par définition il existe a, $b \in U$ tq :*

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t, c) = a \text{ et } \lim_{t \to -\infty} \phi(t, c) = b$$

alors a est un point ω-limite de γ_c et b est un point α-limite de γ_c de plus : $\omega(c) = \{a\}$ et $\alpha(c) = \{b\}$.

Théorème 1.4.1. *Les ensembles ω-limite et α-limite d'une trajectoire γ_{x_0} de (1.1) sont des sous-ensembles fermés de U et si γ_{x_0} est contenue dans un sous-ensemble compact de U alors : $\omega(x_0)$ et $\alpha(x_0)$ sont non vides compact et connexes dans U.*

Preuve 1.1. *Par définition $\omega(x_0)$, $\alpha(x_0) \subset U$.*

1. *Pour montrer que $\omega(x_0)$ est un ensemble fermé il suffit de montrer que la limite P de chaque suite (P_m) de $\omega(x_0)$ appartient a $\omega(x_0)$.*
   Pour chaque P_m , $m = 1, 2, ...$ il existe une suite
   $$\begin{array}{rcl} (t_k^{(m)}) & \to & +\infty \\ k & \to & +\infty \end{array}$$
   avec
   $$\lim_{k\to+\infty} \phi(t_k^{(m)}, x_0) = P_m..........(*)$$
   On suppose que $t_k^{(m)} > t_k^{(m-1)}$ (car sinon nous choisissons une sous suite de $t_k^{(m)}$ qui vérifiée cette propriété) .

   -D'après la définition de la limite $(*)$ il existe une suite des entiers $k(m) > k(m-1)$ tel que pour tout $k \geqslant k(m)$,
   $$\mid \phi(t_k^{(m)}, x_0) - P_m \mid < \frac{1}{m}$$
   .
   On pose $t_m = t_{k(m)}^m$ il est clair que $t_m \longrightarrow +\infty$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ on a
   $$\begin{array}{rcl} \mid \phi(t_m, x_0) - P \mid & = & \mid \phi(t_m, x_0) - P_m + P_m - P \mid \\ & \leqslant & \mid \phi(t_m, x_0) - P_m \mid + \mid P_m - P \mid \end{array}$$
   alors
   $$\lim_{m\to+\infty} \phi(t_m, x_0) = P$$

   D'où $P \in \omega(x_0)$.

   De la même manière on montre que $\alpha(x_0)$ est un ensemble fermé.

2. *Supposons que $\gamma_{x_0} \subset K$ compact dans $\mathbb{R}^n$ séparé alors K est fermé.*

   Soit t_n une suite de réels qui tend vers l'infini. Comme la suite $\phi(t_n, x_0)$ est contenue dans un compact, il existe une sous-suite convergente. Soit q la limite de cette sous-suite, on a $q \in \omega(x_0)$ et il s'ensuit que $\omega(x_0)$ est non vide.

   Montrons que $\omega(x_0)$ est un compact dans U.
   Soit $p \in \omega(x_0)$ alors il existe une suite t_k tel que
   $$\phi(t_k, x_0) \to p$$
   Comme $\phi(t_k, x_0) \in \gamma_{x_0} \subset K$ fermé donc $p \in K$ d'où
   $$\omega(x_0) \subset K.$$

L'ensemble $\omega(x_0)$ est un fermé contenu dans un compact, il est donc compact.
- On démontre maintenant qu'il est connexe. Par l'absurde, on suppose que $\omega(x_0)$ est formé de deux fermés disjoints A et B et on pose $d = d(A, B)$. Il existe une suite t'_n qui tend vers l'infini telle que

$$\phi(t'_n, x_0) \to a \in A$$

et une autre suite t''_n telle que

$$\phi(t''_n, x_0) \to b \in B.$$

il existe alors un entier $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $d(\phi(t'_n, x_0), A) < d/2$ et $d(\phi(t''_n, x_0), A) > d/2$.
On peut donc former une nouvelle suite $t_k = t'_{N+k}$ si k est pair et $t_k = t''_{N+k}$ si k est impair.
La fonction

$$f(t) = d(\phi(t, x_0), A)$$

est une fonction continue sur le segment (t_k, t_{k+1}) qui prend des valeurs supérieures et inférieures à $d/2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une valeur $\tau_k \in (t_k, t_{k+1})$ telle que

$$d(\phi(\tau_k, x_0), A) = d/2.$$

On peut extraire de la suite $\phi(\tau_k, x_0)$ une sous suite convergente $\phi(\tilde{\tau}_n, x_0)$ dont on désigne par $q*$ sa limite. On a $q* \in \omega(x_0)$ et de plus

$$d(q*, A) = \lim_{n \to +\infty} d(\phi(\tilde{\tau}_n, x_0), A) = d/2$$

et

$$d(q*, B) \geq d(A, B) - d(q*, A) = d/2.$$

Il s'ensuit que $q*$ n'appartient ni à A ni à B, c'est une contradiction.
De la même manière on montre pour $\alpha(x_0)$.

Example 1.4.2. *(ensemble ω-limite non-connexe)*
Considérons dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \tag{1.2}$$

qui a pour solution $X(t) = e^t.R.X_0$ tel que

$$R = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t), \\ sin(t) & cos(t). \end{pmatrix}$$

Les trajectoires sont alors des spirales de centre $(0, 0)$. Si on pose $z = arctan(y)$, l'espace des phases devient $U = \mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ les trajectoires du système ayant pour état $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ sont de type spiral, et s'approchent alternativement des droites $z = -\frac{\pi}{2}$ et $z = \frac{\pi}{2}$, ils ne sont pas contenues dans un compact de U. L'ensemble limite de tout point non nul est la réunion de ces deux droites, qui n'est pas connexe (figure 1.5).

Théorème 1.4.2. *Les ensembles ω-limite et α-limite d'une trajectoire γ_{x_0} de (1.1) sont invariants par le flot ϕ de (1.1).*

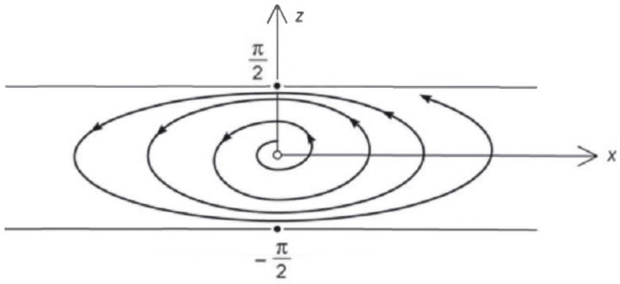


FIGURE 1.5 – Un ensemble ω-limite non-connexe

Preuve 1.2. *Soit $p \in \omega(x_0)$, montrons que $\gamma_p \subset \omega(x_0)$.*
Soit $q \in \gamma_p$ alors il existe $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ tel que $q = \phi(\tilde{t}, p)$.
Comme p est un point ω-limite de $\gamma(x_0)$, alors il existe une suite $t_k \to +\infty$ tel que $\phi(t_k, x_0) \to p$, alors $\phi(\tilde{t} + t_k, x_0) = \phi(\tilde{t}, \phi(t_k, x_0)) \to \phi(\tilde{t}, p) = q$.
Comme $\tilde{t_k} = \tilde{t} + t_k \to +\infty$ alors $q \in \omega(x_0)$ donc $\gamma_p \subset \omega(x_0)$.
La démonstration est analogue pour l'ensemble $\alpha-$limite.

Remarque 1.3.

- Si x_o est un point d'équilibre de (1.1) alors $\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \{x_0\}$.
- Si une trajectoire γ_{x_0} de (1.1) a un unique point $\omega-$limite x_0, alors par le théorème ci-dessus, x_0 est un point d'équilibre de (1.1).
- Un nœud ou un foyer stable a, est l'ensemble $\omega-$limites de chaque trajectoire dans un certain voisinage du point a. - Si q est un point régulier dans $\omega(x_0)$ ou $\alpha(x_0)$, alors la trajectoire passant par q est appelée orbite limite de γ_{x_0}. Ainsi, on voit que $\omega(x_0)$ et $\alpha(x_0)$ sont formés de points d'équilibre et des orbites limites de (1.1).

1.4.2 Attracteurs

Dans les définitions suivantes, un voisinage d'un ensemble A est un ouvert U contenant A et on dit que $x(t) \to A$ lorsque $t \to +\infty$ si la distance $d(x(t), A) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

Définition 1.4.2. *Un ensemble invariant fermé $A \subset U$ est appelé ensemble attractant de (1.1) s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x \in V$, $\phi(t, x) \in V$ pour tout $t > 0$ et $\phi(t, x) \to A$ lorsque $t \to +\infty$.*
Un attracteur de (1.1) est un ensemble attractant qui contient une orbite dense.

Définition 1.4.3 (Claudine Delcart bifurcations et chaos...)**.** *[116], [142] Soit A un ensemble compact, fermé et invariant (i. e. $\phi(t, A) = A$ pour tout t) de l'espace des phases. On dit que A est stable pour le flot de (1.1) si pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que toute solution $\phi(t, x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :*

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi(t, V) = A,$$

on dit que A est attractant et s'il existe une orbite dense dans A, alors A est un attracteur.
L'ensemble

$$B = \bigcup_{t<0} \phi(t, V)$$

est appelé le bassin d'attraction de A. C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A.

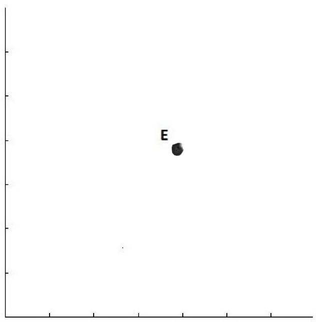
Remarque 1.4.
- Un nœud ou un foyer stable de (1.1) est un attracteur. Cependant, ce n'est pas toujours tout ensemble $\omega-$limite d'une trajectoire est un ensemble attractant ; par exemple, un point selle x_0 d'un système planaire est l'ensemble $\omega-$limite de trois trajectoires dans un voisinage $N(xo)$, mais aucune autre trajectoire passant par des points de $N(xo)$ n'approche x_0 lorsque $t \to +\infty$.

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges (ou chaotiques)

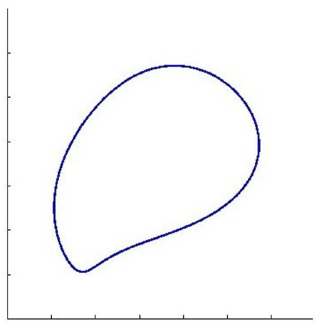
a) Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :
•Point fixe :
c'est l'attracteur le plus simple, il est représente par un point dans l'espace des phases
• Cycle $\omega-$limité (attracteur périodique) :
C'est une trajectoire fermé qui attire toutes les trajectoires proches

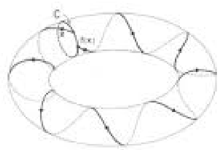
• Attracteur quasi périodique (tore) :
C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplir sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle même au bout d'un temps infini



point fixe



cycle ω-limite



Tore

Example 1.4.3. *[Claudine Delcart bifurcations et chaos...][20] Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \tag{1.3}$$

En coordonnées polaires $x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$ le système (1.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \\ \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

La solution générale de (1.4) est :

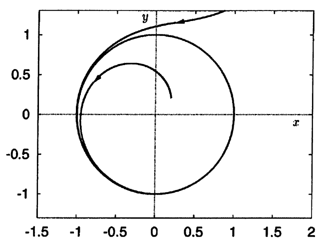


FIGURE 1.6 – Cycle limite de l'exemple (1.4.3) et son bassin d'attraction

$$r(t) = \frac{r_0}{[r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}]^{\frac{1}{2}}} \ \ et \ \ \theta(t) = t + \theta_0$$

D'où

$$x(t) = \frac{r_0}{[r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}]^{\frac{1}{2}}} cos(t + \theta_0) \ \ et \ \ y(t) = \frac{r_0}{[r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}]^{\frac{1}{2}}} sin(t + \theta_0)$$

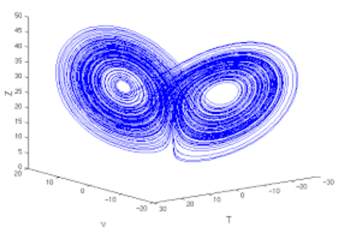
On remarque que $(0, 0)$ *est le seul point d'équilibre, d'autre part la solution correspondant à* $r_0 = 1$ *est*

$$x(t) = cos(t + \theta_0), \quad y(t) = sin(t + \theta_0)$$

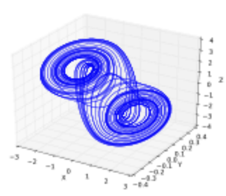
qui est périodique de période 2π *; son orbite est le cercle unité* $x^2 + y^2 = 1$.
Il est claire que toutes les orbites de (1.3), à l'exception de l'origine, spiralent vers le cercle unité qui est un cycle limite et son bassin d'attraction est $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$*,comme illustré dans la figure (1.6).*

b) Attracteurs étranges

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotiques, il a été introduit par Ruelle et Takens [141] [Claudine Delcart bifurcations et chaos...].
Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :
1- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.
2- La dimension de l'attracteur étrange est fractale (non entière) pour un système continue autonome $2 < d < n$, n la dimension de l'espace des phases.
3- Sensibilité au conditions initiales (deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre).



Attracteur de Lorenz



Attracteur de Chua

Le théorème suivant permet souvent de montrer que le volume de l'espace des phases tend vers zéro, sans avoir à résoudre le système.

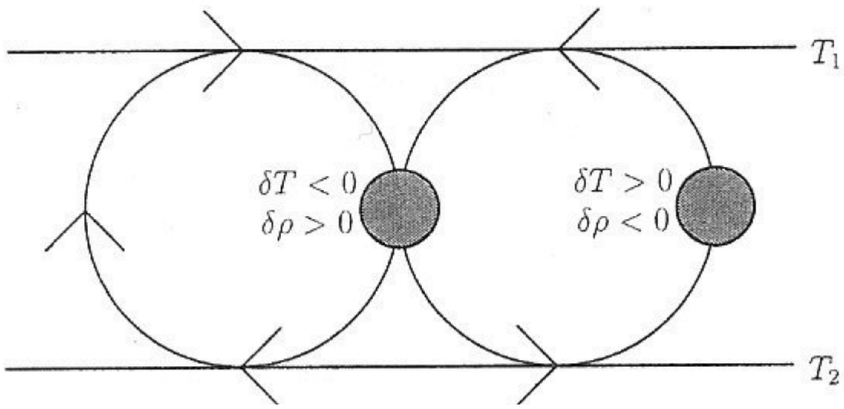


FIGURE 1.7 – Phénomène de convection naturelle entre deux plaques planes horizontales

Théorème 1.4.3. *(Théorème de la Divergence) Soient ϕ_t le flot de (1.1), V un volume de l'espace des phases au temps $t = 0$, $V(t) = \phi_t(V)$ l'image de V par ϕ_t, on a :*

$$\frac{dV(t)}{dt}|_{t=0} = \int_V Div f dx_1...dx_n, \quad Div f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

En particulier si

$$Div f = \lambda = Cte,$$

on a alors :

$$\frac{dV}{dt} = \lambda \int_V dx = \lambda V,$$

d'où

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \lambda.$$

En intégrant, nous obtenons :

$$V(t) = V_0 e^{\lambda t}$$

qui tend vers zéro quand $t \to +\infty$ et $\lambda < o$.

Remarque 1.5. *Le système est dissipatif (resp. conservatif) si $dV/dt < 0$ (resp. $dV/dt = 0$).*

Example 1.4.4. *Considérons le modèle simplifié du phénomène de convection naturelle entre deux plaques planes horizontales, infinies. La plaque supérieure étant à la température T_1 et la plaque inférieure à la température $T_2 = T_1 + \delta T$. La dynamique de ce modèle est donné par le système de Lorenz*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

avec $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$. La divergence du champ de vecteurs f est partout négative :

$$Div f = -\sigma - 1 - b = -\frac{41}{3}$$

Donc les éléments de volume se contractent. Au bout d'une unité de temps cette contraction réduit un volume donné V_0 d'un facteur $e^{-(\sigma+b+l)} = e^{-41/3}$,

1.5 Orbites périodiques

Dans cette section nous allons présenter la théorie nécessaire pour l'étude qualitative des orbites périodiques (les cycles) d'un système autonome de la forme (1.1).

Définition 1.5.1. *On appelle orbite périodique (cycle) toute trajectoire fermée de (1.1) qui n'est pas un point fixe.*
• *Une orbite périodique γ de (1.1) est dite stable si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage V de γ tel que pour tout $x \in V$ et $t > 0$, $d(\phi(t,x),\gamma) < \epsilon$.*
• *L'orbite périodique γ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si pour tout point x d'un voisinage V de γ , $\lim\limits_{t \to +\infty} d(\phi(t,x),\gamma) = 0$.*

Example 1.5.1. *Le centre est un point d'équilibre entouré par une bande continue de cycles. Tout cycle dans la bande est stable mais pas asymptotiquement stable.*

Définition 1.5.2.
1. *Le cycle limite γ d'un système (plan $\mathbb{R}^2$) est un cycle de (1.1) qui est un ensemble ω-limite ou α-limite d'une certaine trajectoire de (1.1) autre que γ.*
2. *Si un cycle γ est un ensemble ω-limite de toute trajectoire dans certain voisinage de γ alors γ est appelé cycle ω-limite ou cycle limite stable.*
3. *Si γ est l'ensemble α-limite de toute trajectoire dans certain voisinage de γ alors γ est appelé cycle α-limite ou cycle limite instable.*
4. *Si γ est un ensemble ω-limite d'une trajectoire autre que γ et l'ensemble α-limite d'une autre trajectoire autre que γ alors γ est appelé cycle limite semi-stable.*

Théorème 1.5.1. *Si une trajectoire dans l'extérieur d'un cycle limite γ d'un c^1-système plan(1.1) admet γ comme ensemble ω-limite, alors toute trajectoire dans un certain voisinage extérieur V de γ admet γ comme ensemble ω-limite, de plus toute trajectoire dans V converge vers γ en spiral. même résultat pour l'intérieur de γ et aussi lorsque γ est l'ensemble α-limite d'une certaine trajectoire.*

Théorème 1.5.2 (Dulac 1923). *[correction du preuve 1988]*
Dans toute région bornée du plan, un système analytique sur $\mathbb{R}^2$ admet au plus un nombre fini de cycle limite.

1.6 Application de Poincaré

l'application de Poincaré est un outil important pour l'analyse des orbites périodiques qui permet de ramener l'étude d'un système dynamique continu de dimension n au voisinage de l'orbite périodique, à celle d'une application (Itération ou système dynamique discret) d'une section transverse de dimension $n-1$ dans elle même.
Si γ_{x_0} est une orbite périodique du système (1.1) ($\dot{x} = f(x)$) et Σ l'hyperplan orthogonal à γ_{x_0} en x_0 alors pour tout point $x \in \Sigma$ suffisamment proche de x_0 la solution de (1.1) passant par x lorsque $t = 0, \phi(t,x)$ traverse Σ en un point $P(x)$. l'application

$$x \mapsto P(x)$$

est appelé application de Poincaré (application de premier retour).

Théorème 1.6.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in C^k(U)$ supposons que $\phi(t, x_0)$ est une solution périodique de (1.1) de période T et que le cycle*

$$\gamma_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi(t, x_0), 0 \leq t \leq T\}$$

est contenue dans U ($\gamma_{x_0} \subset U$).
Soit Σ l'hyperplan orthogonal à γ_{x_0} en x_0 :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0).f(x_0) = 0\}.$$

Alors il existe $\delta > 0$ et une unique fonction $\tau(x)$ de classe C^k sur le voisinage $N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ tel que :
$\tau(x_0) = T$ et $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$ pour tout $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$.

Preuve 1.3. *Ce théorème est une application directe du théorème des fonctions implicites*
- On définit la fonction :

$$F(t, x) = (\phi(t, x) - x_0).f(x_0)$$

Il est claire que F est de classe C^k, on a :

1. *$F(T, x_0) = (\phi(T, x_0) - x_0) = 0$ (de la périodicité de γ_{x_0}).*

2. *$\frac{\partial F}{\partial t}(T, x_0) = \frac{\partial \phi(t,x_0)}{\partial t} |_{t=T} .f(x_0) = f(x_0).f(x_0) = |f(x_0)|^2 \neq 0$*

   car x_0 ne peut pas êter un point fixe alors d'après le théorème des fonctions implicites il existe un $\delta > 0$ et une unique fonction $\tau(x)$ de classe C^k sur $N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ tq :
   $$\begin{cases} \tau(x_0) = T \\ \wedge \\ (\phi(\tau(x), x) - x_0).f(x_0) = 0 \end{cases}$$
   d'où $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$

Définition 1.6.1. *l'application :*

$$\begin{array}{rcl} P : N_\delta(x_0) \cap \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ x & \longrightarrow & P(x) = \phi(\tau(x), x) \end{array}$$

est appelée application de premier retour de Poincaré à l'orbite périodique γ_{x_0}.

Remarque 1.6.

- $\star$ *L'application P est de classe C^k sur $N_\delta(x_0) \cap \Sigma$.*

- $\star$ *Les points fixes de P (les points $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ tq : $P(x) = x$) corresponds au orbites périodiques $\phi(., x)$ de (1.1).*

⋆ *L'application de Poincaré possède une inverse $P^{-1}(x) = \phi(-\tau(x), x)$ de classe C^k, donc P est un difféomorphisme.*

Pour un système plan on suppose que l'origine est transformé à $x_0 \in \gamma \cap \Sigma$.
La l'hyperplan Σ sera une ligne passant par l'origine est le point $x_0 = 0 \in \gamma \cap \Sigma$ devise la ligne Σ en deux segment ouverts Σ^+ et Σ^- avec Σ^+ la ligne à l'extérieur de γ.
Soit s la distance algébrique entre les points de Σ et $x_0 = 0$ avec $s > 0$ pour Σ^+ et $s < 0$ pour Σ^-.
Donc l'application P est défini pour $|s| < \delta$. Et on a :

$$P(0) = 0.$$

Introduisant maintenant la fonction de déplacent $d(s) = P(s) - s$ alors $d(0) = 0$ et $d'(s) = P'(s) - 1$.
D'après le théorème de la moyenne pour $|s| < \delta$ on a :

$$d(s) = d'(c).s$$

pour un certain c entre 0 et s.
Comme $d'(s)$ est continue leur signe sera le même signe de $d'(0)$ pour $|s|$ suffisamment petit et tel que $d'(0) \neq 0$.
Donc

- Si $d'(0) < 0$ alors $d(s) > 0$ pour $s < 0$ et $d(s) < 0$ pour $s > 0$ (c'est-à-dire le cycle γ est un cycle ω-limite ou stable). De même
- Si $d'(0) > 0$ alors $d(s) > 0$ pour $s > 0$ et $d(s) < 0$ pour $s < 0$ (c'est-à-dire le cycle γ est un cycle limité instable (α-limite)).

On a les résultats suivants pour P.

- Si $P(0) = 0$ et $P'(0) < 1$ alors γ est un cycle limite stable.

- Si $p(0) = 0$ et $P'(0) > 1$ alors γ est un cycle limite instable.

Alors la stabilité de γ est déterminé par la dérivée de l'application de Poincaré P.
Le théorème suivant donne une formule de $P'(0)$ en fonction de $f(x)$ et $\gamma(t)$.

Théorème 1.6.2.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et supposons que $f \in C^1(U)$, soit $\gamma(t)$ une solution périodique de (1.1) de période T alors la dérivée de l'application de Poincaré $P(s)$ le lange de la ligne Σ orthogonale à

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$$

à $x = 0$ est donné par :

$$P'(0) = e^{\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t))dt}.$$

Avec

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Corollaire 1.6.1. *Sous les mêmes hypothèse du théorème précédent on a :*
La solution périodique $\gamma(t)$ est un cycle limite stable Si

$$\int_0^T \bigtriangledown . f(\gamma(t))dt < 0$$

et instable Si

$$\int_0^T \bigtriangledown . f(\gamma(t))dt > 0$$

Example 1.6.1. *Étudier la stabilité du cycle $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ pour le système suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x} = & -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = & x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \tag{1.6}$$

Définition 1.6.2. *Soit $p(s)$ l'application de Poincaré pour le cycle γ du système plan analytique (1.1) et soit*

$$d(s) = p(s) - s, \text{ la fonction de déplacement .}$$

Alors :

– *si $d(0) = d'(0) = \cdots = d^{k-1}(0) = 0$ et $d^k(0) \neq 0$ γ est appelé cycle limite multiple de multiplicité k.*
– *si $k = 1$ on dit que γ est un cycle limite simple.*

Remarque 1.7.

⋆ *Si k est paire alors γ est un cycle limite semi stable .*
⋆ *Si k est impaire alors γ est un cycle limite :*
– *Stable si $d^{(k)}(0) < 0$*
– *Instable si $d^{(k)}(0) > 0$.*
Pour les systèmes analytiques on a $d^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ si et seulement si γ est entouré par une bande continue de cycle.

Théorème 1.6.3. *(Poincaré 1881) Un système plan analytique (1.1) ne peut pas avoir un nombre infini de cycles limites qui accumulent en un cycle de(1.1).*

Preuve 1.4. *Supposons qu'il y a un nombre infini de cycle limite γ_n qui accumulent en un cycle γ , alors la fonction de déplacement $d(s)$ qui est une fonction analytique admet un nombre infini de zéros au voisinage de $s = 0$, donc $d(s) \equiv 0$ dans un voisinage V_0. Alors γ_n ce prolonge en une bande de cycle au voisinage de γ qui ne sont pas des cycles limites.*

1.7 Théorie de Floquet d'une orbite périodique

Soit γ une orbite périodique de (1.1), ($\dot{x} = f(x)$).
Le système linéarisé de (1.1) au voisinage de $\gamma(t)$ est donnée par :

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.7}$$

où $A(t) = Df(\gamma(t))$, il est clair que $A(t)$ est une matrice T- périodique. On note $\Phi(t)$ la matrice fondamentale du système linéaire (1.7), solution du problème matriciel

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

La solution $x(t)$ du système (1.7) avec la condition initial $x(0) = x_0$ est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t).x_0$$

Théorème 1.7.1. *(Floquet)*
La matrice fondamentale $\Phi(t)$ s'écrit de la forme

$$\Phi(t) = Q(t).e^{tB}$$

ou $Q(t)$ est une matrice T-périodique différentiable et la matrice B est constante.

Preuve 1.5. *Soit la matrice fondamentale $\Phi(t)$ qui est inversible. "Toute matrice inversible est l'exponentielle d'une matrice" alors il existe une matrice $C(t)$ tel que*

$$\Phi(t) = e^{C(t)},$$

on pose $B = \frac{C(T)}{T}$ on obtient

$$\Phi(T) = e^{TB}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\Phi(t+T)}{dt} & = & A(t+T)\Phi(t+T) \\ & = & A(t)\Phi(t+T) \end{array}$$

Alors la matrice $\Phi(t+T)$ satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \Psi(t) & = & A(t)\Psi(t) \\ \Psi(0) & = & e^{TB}. \end{cases}$$

La matrice

$$\Phi(t).e^{TB},$$

est solution du même problème. d'après le théorème de Cauchy on déduit que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t).e^{TB}$$

La matrice $Q(t) = \Phi(t).e^{-tB}$ est différentiable est satisfait

$$\begin{array}{rcl} Q(t+T) & = & \Phi(t+T)e^{-(t+T)B} \\ & = & \Phi(t).\exp^{-tB} \\ & = & Q(t) \end{array}$$

donc

$$Q(t) = \Phi(t).e^{-tB}$$

est une matrice T-Périodique.

Définition 1.7.1. *: On appelle exposants caractéristiques de l'orbite périodique γ les valeurs propres λ_j de la matrice B.*
Les quantités e^{λ_j} sont appelées multiplicateurs caractéristiques (de Floquet) de l'orbite périodique γ.

Soit $\phi_t(x)$ le flot de (1.1) au voisinage du point 0 et $D\phi_t(x)$ l'application linéaire tangente au flot $D\phi_t(x)$. l'application $D\phi_t(x)$ satisfait :

$$\frac{\partial D\phi_t(x)}{\partial t} = D[\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t}] = D[f(\phi_t(x))] = Df(\phi_t(x)).D\phi_t(x)$$

donc

$$\frac{\partial D\phi_t(0)}{\partial t} = Df(\phi_t(0)).D\phi_t(0) = A(t).D\phi_t(0)$$

et $D\phi_0(x) = I$, en particulier $D\phi_0(0) = I$
donc $D\phi_t(0)$ et $\Phi(t)$ sont solutions du même problème de Cauchy alors $\Phi(t) = D\phi_t(0)$ pour tout t.

donc :

$$D\phi_t(0) = \varphi(t).\mathrm{e}^{tB}$$

et on particulier :

$$D\phi_T(0) = \mathrm{e}^{TB}$$

Théorème 1.7.2. *: Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les exposants caractéristiques de l'orbite périodique γ, alors l'un d'entre eux notons λ_n est nul et les multiplicateurs caractéristiques e^{λ_j}, $j = 1, 2, ..., n-1$, sont les valeurs propres de $DP(0)$. Si la base de $\mathbb{R}^n$ est choisi de sorte que $f(0) = (0, 0, ..., 1)^T$ alors la dernière colonne de $D\phi_T(0)$ est $(0, 0, ..., 1)^T$, et $DP(0)$ s'identifier avec la matrice extraite de $D\phi_T(0)$ en supprimant la dernière linge et la dernière colonne.*

Preuve 1.6. *: La solution périodique $\gamma(t) = \phi_t(0)$ satisfait :*

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t))$$

En dérivant on obtient

$$\gamma''(t) = Df(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \gamma''(t) = A(t).\gamma'(t) \\ \gamma'(0) = f(0) \end{cases}$$

Donc :

$$\gamma'(t) = \Phi(t).f(0)$$

d'où :

$$\gamma'(T) = \Phi(T).f(0) = \mathrm{e}^{TB}.f(0)$$

donc

$$\gamma'(T) = D\phi_T(0).f(0) \tag{1.8}$$

d'autre part on a

$$\gamma'(T) = f(\gamma(T)) = f(0) \tag{1.9}$$

alors de (1.8) et (1.9) on déduit que :

$$D\phi_T(0).f(0) = f(0)$$

donc $f(0)$ est un vecteur propre de $D\phi_T(0) = \mathrm{e}^{TB}$ et $\lambda = 1$ est la valeur propre associé. Alors 0 est une valeur propre de B.

Choisissons une base de $\mathbb{R}^n$ de sorte que $f(0) = (0, ..., 1)^T$ et donc la dernière colonne de la matrice e^{TB} et égale à $(0, ..., 1)^T$

On note :

$$h(x) = \phi_{\tau(x)}(x) = \phi(\tau(x), x)$$

L'application de Poincaré P est la restriction de cette fonction à Σ, $P(x) = \tilde{h}(x)$.
On a

$$Dh(x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\tau(x), x).D\tau(x) + D\phi_{\tau(x)}(x)$$

pour $x = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} Dh(0) &= f(0)D\tau(0) + D\phi_T(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau(0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\tau(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} + D\phi_T(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\tau(0)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\tau(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{TB} \end{aligned}$$

Alors $DP(0) = D\tilde{h}(0)$ s'obtient de $\mathrm{e}^{TB} = D\phi_T(0)$ on supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

Définition 1.7.2. *Si toutes les valeurs propres λ_j, $j = 1, 2, ..., n-1$ ont des parties réelles non nulles, on dit que l'orbite périodique γ est hyperbolique*

Corollaire 1.7.1. *Si toutes les valeurs propres λ_j, $j = 1, 2, ..., n-1$ ont des parties réelles strictement négatives, alors l'orbite périodique γ est asymptotiquement stable.*
Si une des valeurs propres λ_j, $j = 1, 2, ..., n-1$ ou plus, ont des parties réelles strictement positives, alors l'orbite périodique γ est instable.

1.8 Variétés invariantes des orbites périodiques

De manière analogue au points d'équilibres les orbites périodiques possèdent aussi des variétés stable, instable et centrale. Soitγ une orbite périodique et soit V un voisinage de γ. Les variétés locales stables sont données par :

$$S(\gamma) = \{x \in V \diagup d(\phi_t(x), \gamma) \longrightarrow 0_{t\to+\infty} \;\; et \;\; \phi_t(x) \in V \;\; pour \;\; t \geq 0\}$$

$$U(\gamma) = \{x \in V \diagup d(\phi_t(x), \gamma) \longrightarrow 0_{t\to-\infty} \;\; et \;\; \phi_t(x) \in V \;\; pour \;\; t \leq 0.\}$$

Les variétés globales stable et instable sont données alors par :

$$\begin{aligned} W^s(\gamma) &= \bigcup_{t\leq 0} \phi_t(S(\gamma)) \\ & et \\ W^u(\gamma) &= \bigcup_{t\geq 0} \phi_t(U(\gamma)). \end{aligned}$$

Les variétés globales sont invariantes par le flotϕ_t de (1.1)

Théorème 1.8.1. *Soit $f \in C^1(U)$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'orbite périodique γ de (1.1) de période T avec $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$, s'il y a $0 \leq k \leq n-1$ exposants caractéristiques à parties réelles négatives et $m-k$ sont à parties réelles positives et $n-m$ sont à parties réelles nulles, alors il un voisinage V de γ tel que la variété stable $S(\gamma)$*

est une variété de dimension $k+1$ différentiables qui est positivement invariante par le flot ϕ_t.
La variété instable $U(\gamma)$ est une variété de dimension $m-k+1$ différentiable est négativement invariante par le flot ϕ_t, de plus la variété stable et la variété instable se coupent transversalement en γ.

Remarque 1.8. *Supposons que l'origine est transformé à x_0, donc $\gamma(t) = \phi_t(0)$.*
Soit $\lambda_j = a_j + ib_j$ les exposants caractéristiques de γ, supposons de plus que $u_1 = f(0)$ et qu'on a une base de vecteurs propres généralisés de $\Phi(T)$ pour $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, ..., u_m, v_m\}$$

alors en définie les sous espace stable instable et centrale de γ au point $x_0 \in \gamma$ comme suite :

$$\begin{aligned} E^s(\gamma) &= Vec\{u_j, v_j / a_j < 0\} \\ E^u(\gamma) &= Vec\{u_j, v_j / a_j > 0\} \\ E^c(\gamma) &= Vec\{u_j, v_j / a_j = 0\}. \end{aligned}$$

Les variétés stable W^s, instable W^u et centrale W^c sont tangentes au sous espaces stable $E^s(\gamma)$, instable $E^u(\gamma)$ et centrale $E^c(\gamma)$ au point $x_0 = 0 \in \gamma$ respectivement.

Théorème 1.8.2. *(Variétés centrale)*
Soit $f \in C^r(U)$, $r \geqslant 1$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'orbite périodique :
$\gamma : \gamma(t) = \phi_t(x_0)$ de (1.1) de période T .
Si k exposants caractéristiques ont leurs parties réelles négatives. $m-k$ exposants caractéristiques ont leurs parties réelle positives.
$n-m$ exposants caractéristiques ont leurs parties réelles nulles alors il existe une variété centrale de γ de dimension $n-m$ invariante par le flot ϕ_t de (1.1), de plus $W^{(s)}$, W^u et W^c se coupent transversalement à γ et si on transforme l'origine à x_0 alors W^c est tangente à $E^c(\gamma)$ en $x_0 = 0 \in \gamma$.

Théorème 1.8.3. *Soit $f \in C^1(U)$,où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant une orbite périodique $\gamma(t)$ de (1.1) de période T.*
Alors une condition nécessaire pour que $\gamma(t)$ soit asymptotiquement stable et que $\int_0^T \nabla.f(\gamma(t))dt < 0$

1.9 Théorème de Poincaré Bendixon

Les ensembles ω-limite ou α-limite d'une trajectoire dans $\mathbb{R}^n$, sont des points critiques, des cycles limites, des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ ou des attracteurs étranges. Pour un systèmes plan, les ensembles γ ou α-limites sont des points fixes ou des orbites périodiques (pour les systèmes continus autonomes)

Théorème 1.9.1. *Soit $f \in C^1(U)$ tel que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
Supposons que (1.1) admet une trajectoire γ avec γ^+ contenu dans un sous-ensemble compact F de U.
On suppose de plus que (1.1) admet un nombre fini de point fixes. Alors on a trois possibilités :

a) Si $\omega(\gamma)$ ne contient pas des points fixes c'est une orbite périodique.

b) Si $\omega(\gamma)$ contient à la fois des points singuliers et des points réguliers alors $\omega(\gamma)$ est constitué d'un ensemble d'orbites. et chaque-une d'entre elles tend vers un point singulier lorsque $|t| \longrightarrow +\infty$ et dans ce cas $\omega(\gamma)$ est appelée un graphique.

c) Si $\omega(\gamma)$ ne contient aucun point régulier. Alors $\omega(\gamma)$ est un point fixe.

Théorème 1.9.2. *(Autre version) Si D est un domaine borné attractant du plan, alors toute trajectoire de D admet comme ensemble ω-limite :*

* *Soit un point fixe.*

* *Soit une orbite périodique.*

* *soit un ensemble constitué de la réunion des points fixes et d'orbites régulières qui les joignent (hetérocline ou homocline).*

Définition 1.9.1. ***(Divergence d'un champ de vecteur)***
On considère un champ de vecteurs f définie par le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \tag{1.10}$$

Sur un domaine D on appelle divergence de f au point (x, y) l'expression suivante :

$$div(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

La divergence d'un système en un point mesure la manière dont les trajectoires convergent ou divergent au voisinage de ce point plus précisément, si la divergence est négative le voisinage se contracte et les trajectoires convergent, par contre si la divergence est positive le voisinage se dilate et les trajectoires divergent.

Proposition 1.1. ***(Critère négatif de Bendixon)***
*Soit un système dynamique donné de type(1.10), soit D une région simplement connexe c'est a dire d'un seul tenant ou encore '**sans trou**' si la quantité*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

est de signe constant sur D alors il n'existe pas de cycle limite entièrement contenu dans D.

Proposition 1.2. ***(critère négative de Dulac)***
Soit un système dynamique donné de type(1.10)
soit D une région simplement connexe .
soit $B(x, y)$ une fonction strictement positif continue et différentiable quelconque sur D si la quantité

$$\frac{\partial Bf}{\partial x} + \frac{\partial Bg}{\partial y}$$

et de signe constant sur D, alors il n'existe pas de cycle entièrement contenu dans D.

Ce critère est basée sur l'idée que le fait de multiplier les coordonnés d'un champ de vecteur par une fonction strictement positif ne modifie pas les trajectoires mais simplement la vitesse a laquelle elles sont parcourues.