Centre Universitaire de Mila

Département MI

$6^{ème}$ Semestre

Année 2017/2018

$3^{ème}$ année Math

Durée 1h30m

Examen : Transformations intégrales

EXERCICE 01

Considérons l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

tq. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,2]}(x)$

$g(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

① Mettre vraie ou fausse et justifier la réponse.

$f \in L^1$, $f \in L^2$, $g \in L^1$, $g \in L^2$.

② Comparer entre L^1 et L^2.

③ que remarquez vous ?

EXERCICE 02

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

① Calculer la transformation de Fourier de f si elle existe.

② Déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx$.

(utiliser le théorème de plancherel).

Exercice 03 :

soit $a \in \mathbb{R}_+$

① calculer la transformation de Laplace de f et déterminer l'abscisse de convergence simple de

$$f(t) = t\,e^{at}$$

② soit $f_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$$t \longmapsto f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{at}$$

Montrer par récurrence que :

$$\mathcal{L}(f_k)(z) = \frac{1}{(z-a)^{k+1}}$$

③ Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'(x) + 3y(x) = \cos 3x \quad , y(0) = 0$
- $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4e^{3x}$

$$y(0) = 4 \quad , \quad y'(0) = 9$$

$$\boxed{\int_0^x e^{3t} \cos 3t \, dt = \frac{1}{6}\left(e^{3x} \cos 3x + e^{3x} \sin 3x - 1\right)}$$

Bon Courage

Haddad

Centre Universitaire de Mila — Année 2018/2019

Département MI — 3ème année Math

6ème Semestre — Durée : 1h30 mn

Examen : Transformations intégrales dans les espaces L^p.

Exercice 01 :

Soient $p, q \in [1, +\infty[$, $(p \neq q)$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p \cap L^q$.

On suppose que (f_n) converge vers 0 dans L^p et que (f_n) est une suite de Cauchy dans L^q.

Montrer que (f_n) converge vers 0 dans L^q.

Exercice 02 :

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et soient f, g, f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$, des fonctions tels que :

$$f = g = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(x) = g_n(x) = \sqrt{n}\, \mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}[}$$

① Montrer que : $f, f_n \in L^1$, $g, g_n \in L^\infty$.

② Montrer que :

ⓐ $f_n \longrightarrow 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}$

ⓑ $g_n \longrightarrow 0$ p.p.

ⓒ $f_n g_n \not\longrightarrow 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 03 = 10

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

① calculer la transformation de Laplace de f et déterminer l'abscisse de convergence simple de f

$$f(t) = t\, e^{at}$$

② Soit : $f_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$$t \longmapsto f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{at}$$

Montrer par récurrence que :

$$\mathcal{L}(f_k)(z) = \frac{1}{(z-a)^{k+1}}$$

③ Résoudre les équations différentielles suivantes.

- $y'(x) + y(x) = 1$, $y(0) = 0$
- $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = x^2 e^{x}$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2$$

Bon Courage

Haddad