## I- Echantillonnage

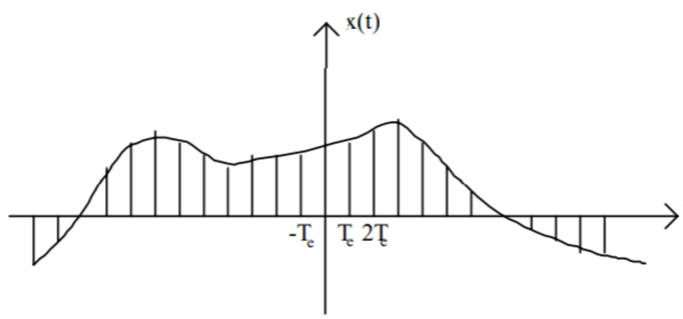
Dans ce chapitre nous nous intéressons au problème crucial de l'échantillonnage. Les signaux physiques sont analogiques, et nécessitent donc une numérisation afin d'être traités sur ordinateur. La numérisation du signal nécessite dans un premier temps l'échantillonnage du signal puis sa quantification.

**L'échantillonnage** consiste à mesurer le signal physique (une tension électrique généralement) à des intervalles de temps réguliers, ça correspond à une discrétisation en temps du signal et les mesures sont appelés échantillons.

La grandeur caractéristique de l'échantillonnage est la fréquence d'échantillonnage

**La quantification** : coder cette mesure sur un nombre fini de bits donc cette opération permet d'associer une valeur numérique à l'échantillon prélevé. . C'est une discrétisation en amplitude. Les valeurs discrètes obtenues sont codées sur un ou plusieurs bits.

La grandeur caractéristique de la quantification est le nombre de bits alloués à chaque échantillon.



L'objectif du traitement numérique du signal est d'extraire les informations contenues dans le signal analogique initial x(t). Il est donc impératif de conserver ces informations après échantillonnage. Pour cela nous étudierons les différentes opérations temporelles et fréquentielles effectuées.

Soient x(t) le signal analogique et $x_e$ (t) le signal échantillonné. Soient Te la période d'échantillonnage et F =1 /$T_e$ la fréquence d'échantillonnage. Le signal $x_e$ (t) est obtenu par multiplication de x(t) par un peigne de Dirac.

$$x_e(t) = x(t)|I|_T(t) = x(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_e)$$

D’où :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Pour ne pas perdre aucune information, il faut que cette transformation (x(t) → $x_e$(t)) soit réversible.

Déterminons le spectre $X_e$(f) du signal $x_e$(t) :

$$X_e(f) = TF\{x_e(t)\} = TF\{x(t)|I|_{Te}(t)\}$$

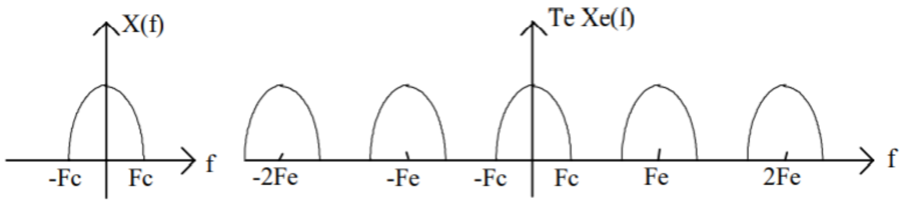
$$X_e(f) = X(f) * TF\{x(t)|I|_{Te}(t)\} = X(f) * \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f - \frac{n}{T_e})$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - \frac{n}{T_e})$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T_e})$$

Cette relation montre que $X_e(f)$ est obtenue, à un facteur près $(\frac{1}{T_e})$, par une simple périodisation en fréquence du spectre X(f). Le spectre est reproduit tous les $F_e = \frac{1}{T_e}$ Cette périodisation peut s'effectuer suivant trois cas de figures:

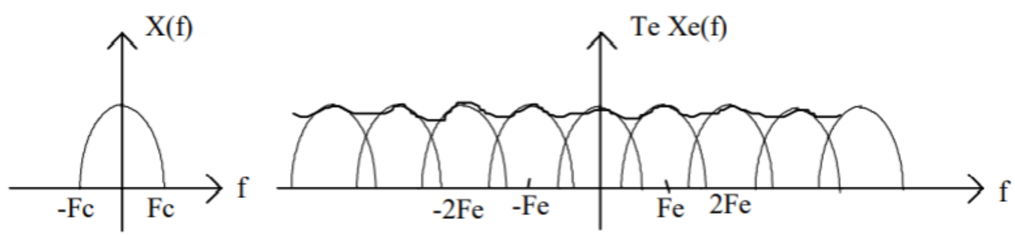
**1- X (f) est à support borné, sa fréquence de coupure est $F_c$ et $F_e > 2F_c$**




On constate qu'au prix d'un simple filtrage passe-bas idéal, de fréquence de coupure **$F_e$ /2** on retrouve X (f), donc x(t):

*Les informations initiales ne sont pas perdues. La transformation (x(t) → $x_e$(t)) est réversible. On a correctement échantillonné le signal.*

**2- X (f) est à support borné, sa fréquence de coupure est $F_c$ et $F_e < 2F_c$**




Il est clair que le spectre initial X (f) est déformé. On ne peut pas obtenir X (f) à partir de Xe(f), donc :

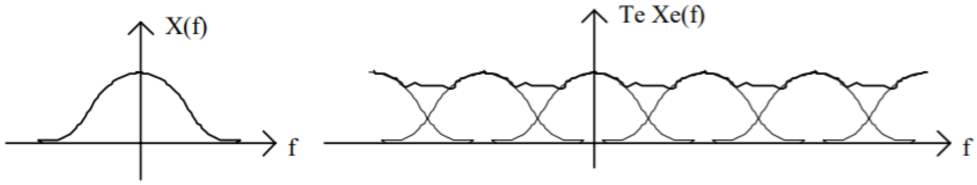
*Les informations initiales sont perdues. La transformation est irréversible. On a mal échantillonné le signal.*

**Remarque** :

Si après l'échantillonnage les spectres translatés X(f) se chevauchent, on dit qu'il y a repliement spectral, recouvrement spectral ou encore "aliasing".

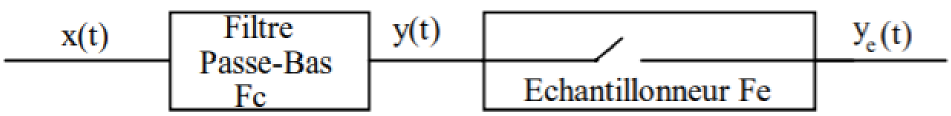
### 3- X (f) est à support non-borné

Dans ce cas, il est évident qu'il y aura repliement spectral.




Il apparaît donc impossible d'échantillonner un tel signal.

En pratique, on filtrera le signal x(t) par un filtre passe bas de fréquence de coupure $F_c$, puis on échantillonnera le signal de sortie du filtre à une fréquence $F_e > 2\ F_c$




**Théorème de Shannon**

Un signal x(t) à spectre X(f) borné sur l'intervalle $[-f_c, f_c]$ est correctement échantillonné si $F_e > 2F_c$ .

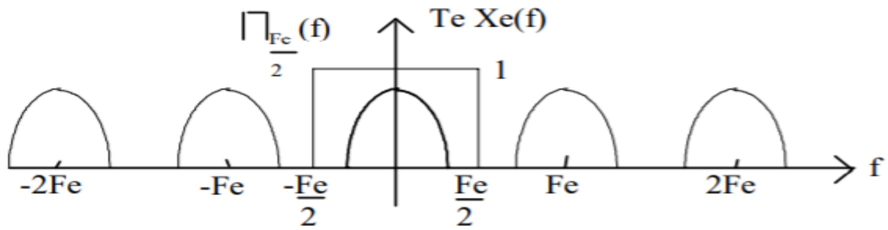
**Exemple**

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Longrightarrow f_c = f_0 \ et \ f_e > 2f_0$$

## II- Reconstruction du signal

Pour retrouver x(t) à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on supposera que le signal a été correctement échantillonné ( $f_e > 2\ f_c$ ). Déterminer x(t) revient à isoler X(f) dans Xe(f). Ceci est possible en multipliant Xe(f) par une porte en fréquence $\prod_{\frac{f_c}{2}}(f)$ de hauteur $T_e$ :

$$X(f) = T_e X_e(f) \prod_{\frac{f_c}{2}}(f)$$




$$x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = T_e \; TF^{-1}\{X_e(f) \prod_{\frac{f_c}{2}}(f)\}$$

$$x(t) = T_e \, x_e(t) * TF^{-1}\left\{\prod_{\frac{f_c}{2}}(f)\right\}$$

$$x(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) * \; f_e sinc\,(\pi f_e t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)(\delta(t - nT_e) * sinc\,(\pi f_e t))$$

D’où

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\, sinc\,(\pi f_e (t - nT_e))$$

C'est la formule d'interpolation de SHANNON.

**Remarques** :

1- Cette formule n'est pas utilisable en temps réel car elle nécessite la connaissance à l'instant t de tous les échantillons ($-\infty \rightarrow \infty +$).
2- Sur-échantillonner n'apporte aucune information supplémentaire.
3- Les fonctions $s_n(t) = sinc\,(\pi f_e(t - nT_e))$ sont orthogonales. On en déduit que toute fonction à spectre borné [-$F_c$ , $F_c$ ] peut être décomposée sur la base $\{s_n(t)\}$.