Chapitre IV

Résolution des équations différentielles ordinaires (Méthode d'Euler, Méthode de Runge-Kutta, Méthode d'Adams)

Introduction

On désigne par I un intervalle et t_0 un point fixé dans I ; on se donne une fonction f définie et continue sur I, et on cherche à trouver une fonction y continue et dérivable sur l'intervalle I, telle que :

$$(E)\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & (C) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad t \in [t_0, T] \quad [\$]$$

Le problème **(E)** s'appelle un **problème de Cauchy** pour le système différentiel **(C)** ; la condition **[$]** s'appelle une **condition de Cauchy**. Une fonction y qui vérifie ces équations est appelée une **intégrale** (solution)de ce système différentiel.

L'instant t_0 est alors appelé *instant initial* et la condition **[$]** est appelé *condition initiale*.

L'équation **(C)** est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir qu'une dérivée première de la fonction y.

On désire trouver une approximation de la fonction y. On choisit des points $t_i \in \hat{I} = [a, b]$. On cherche alors une approximation y_i de $y(t_i)$.

Les **méthodes à 1 pas** font intervenir dans le calcul de y_n, les valeurs de t_{n-1}, y_{n-1}

Les **méthodes à plusieurs pas** font intervenir dans le calcul de y_n, les valeurs de

$$\begin{cases} t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-k} \\ y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k} \end{cases}$$

On définit le pas de l'approximation : h = (b – a) / N, alors $t_i = a + i*h$ i = 0, 1, 2, ..., N

IV-1- Méthodes à un seul pas

IV-1-1- La Méthode D'Euler Explicite :

Étudier d'abord les équations différentielles scalaires du premier ordre. ⇒famille de solutions y(t) à un paramètre (y_0)

$\frac{dy}{dt} = f\big(t, y(t)\big)$ $\quad$ $avec$ $\quad$ $y(t_0) = y_0$ $\quad$ condition initiale $\quad$ (1)

Résolution numérique approchée sur l'intervalle [t_0, $t_0 + L$] de longueur L

Découpage de cet intervalle selon un pas constant h = L/n , c à d, en n parties égales

Prendre les solutions $y(t_k)$ aux instants $t_k = t_0 + k.h$ pour k=0, 1, …, n.

Solution numérique : y_k = approximation de $y(t_k)$ À partir de la condition initiale $y_0 = y(t_0)$ imposée

Écrivant l'équation de la tangente à la courbe y= y(t) en t= t_0

$Y_0(t) = \quad y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0)$ $\quad$ (2)

Selon (1), l'équation (2) peut s'écrire :

$Y_0(t) = \quad y(t_0) + f(t_0, y(t_0))(t-t_0)$

Encore

$Y_0(t) = \quad y_0 + f(t_0, y_0)(t-t_0)$

Au point t = t_1

$$Y_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$$

Or

$$h = t_1 - t_0$$

$$Y_0(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

En exprimant $Y_0(t_1) \approx y_1$, on peut écrire :

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

De même considérons la droite d'équation

$$Y_1(t) = y(t_1) + y'(t_1)(t - t_1)$$

Au point $t = t_2$

$$Y_1(t_2) = y_1 + y'(t_1)(t - t_1)$$

En faisant de même nous aurons :

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

Au point $t = t_{n+1}$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Et c'est le même résultat obtenu si on applique le développement de taylor

$$y(t_{k+h}) = y(t_i) + h\frac{dy}{dt}(t_i) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dt^2}(t_k) + \cdots$$

faire une boucle sur les abscisses t_k pour calculer l'approximation y_{k+1} à t_{k+1} →approximer ainsi de proche en proche la solution sur l'intervalle L.