Série 4 :

Exercice 1 :

(a) $f(z) = \log(1+z)$, la série de Taylor de $f(z)$ au pt $z_0 = 0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

$f(0) = \log(1) = 0$, $f'(z) = \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1}$, $f'(0) = 1$,

$f''(z) = -(1+z)^{-2}$

$f''(0) = -1$, $f'''(z) = -(-2)(1+z)^{-3}$, $f'''(0) = 2 = 2!$

$f^{(4)}(z) = -3 \times (2)(1+z)^{-3-1} = -3!\,(1+z)^{-(3+1)}$, $f^{(4)}(0) = -3!$

$f^{(n+1)}(z) = (-1)^n n!\,(1+z)^{-(n+1)}$, $f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!$

Alors

$$f(z) = \log(1+z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}z^4 + \dots$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Autre méthode : si $|z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

On obtient alors par intégration entre 0 et z

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Le domaine de convergence de la série de Taylor est défini par : $|z - z_0| < R$ rayon de convergence

(b) Le n-ième terme est $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = a_n z^n$

D'après le critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} \times \frac{n+1}{(-1)^{n+1-1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|-\frac{(n+1)}{n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|-\frac{n+1}{n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Donc la série converge pour $|z| < 1$

Exercice 2 :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} \quad , \quad |z|<1$$

On a : $\frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+z}$

Dans le disque $D(0,1)$, on a $|z|<1$, donc

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \quad |z|<1}$$

$$\frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1}{2}\times\sum_{n\geq 0} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\underbrace{(-z)^n}_{(-1)^n z^n}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) z^n \quad , \quad |z|<1$$

Exercice 03 :

Soit la fonction : $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+4}$

a) $|z|<1$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{4-z}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{4}\right)}\right)$$

Si $|z|<1$, on a, $\frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n}_{|z|<1} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{4^n}}_{|z|<4}\right) \Leftarrow \left(\left|\frac{z}{4}\right|<1\right)$

Donc : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right) z^n \quad , \quad |z|<1$

b) $1<|z|<4$, $f(z) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-4}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4-z}\right)$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{4\left(1-\frac{z}{4}\right)}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}}_{1<|z|} - \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{4^n}}_{|z|<4}\right)$$

*) Si $|z|>1$, $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$

$\left(\left|\frac{1}{z}\right|<1 \quad 1<|z|\right)$

*) Si $|z|<4$ $\left(\left|\frac{z}{4}\right|<1\right)$, $\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{4^n}$, donc

Donc :

$$f(z) = +\frac{1}{3}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}\right]$$

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}}_{\text{la partie principale}} \underbrace{- \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}}_{\text{la partie analytique}}$$ (essentielle)

(c) $4 < \|z\| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-4}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) + \frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}\right)$$

- Si $\|z\| > 4$ $\left(\|\frac{z}{4}\| > 1, \|\frac{4}{z}\| < 1\right)$

on a $\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z(1-\frac{4}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}}$

(Si $\|z\| > 4 > 1$) $|\frac{1}{z}| < 1$ $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$

Donc $f(z) = \frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{z^{n+1}}\right)$

$$\underbrace{f(z) = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-4^n}{z^{n+1}}\right)}_{\text{la partie principale}}, \quad 4 < |z| < +\infty$$

Exercice 4 :

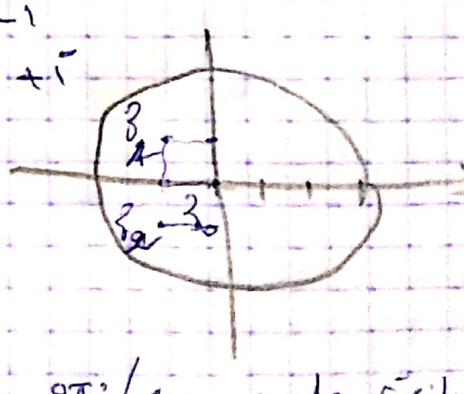
(a) $\|z\| = 3$ La fonction à intégrer $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}$

Un pôle double $z_0 = 0$ et deux pôle simples en $z = \mp i - 1$ (racines de z^2+2z+2)

$\Delta = +(1) - 2 = -1 = i^2$, $z_1 = -1 - i$

Si f est holomorphe sur un contour fermé C et sur l'intérieur sauf en un nombre fini de points $z_1, \dots, z_n$ intérieurs à C (points singuliers isolées) $z_2 = -1 + i$

Tous les pôles de $f(z)$ sont intérieurs à $C : \|z\| = 3$



Donc : Par le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} Res(f, z_k) = 2\pi i \text{ (sommes des résidus intérieurs à } |z| = 3)$$

Donc : $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)} = \mathrm{Res}(f,z_0) + \mathrm{Res}(f,z_1) + \mathrm{Res}(f,z_2)$

Le résidu en $z_0 = 0$ ($\mathrm{Res}(f,0)$) si z_0 un pôle simple, $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$

Si z_0 un pôle d'ordre k,

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \{(z-z_0)^k f(z)\}$$

si $k=2$: $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\{(z-z_0)^2 f(z)\}$

donc :
$$\mathrm{R}(f, z_0=0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\cancel{z^2} \times \frac{e^z}{\cancel{z^2}(z^2+2z+2)}\right)$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+2z+2}\right)$$
$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z(z^2+2z+\cancel{2}) - e^z(2z+\cancel{2})}{(z^2+2z+2)^2}\right)$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{e^z z^2}{(z^2+2z+2)^2} = 0$$

Le résidu en $z_1 = -1+i$ ($\mathrm{Res}(f,z_1)$) :

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to -1+i}\left\{(z-(-1+i)) \times \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}$$
$$= \lim_{z\to -1+i} \frac{e^z}{z^2}\left(\frac{\cancel{z-(-1+i)}}{\cancel{z-(-1+i)}\,(z-(-1-i))}\right)$$
$$= \lim_{z\to -1+i} \frac{e^z}{z^2}\left(\frac{1}{z-(-1-i)}\right) = \frac{e^{-1+i}}{(-1+i)^2} \times \frac{1}{2i} = \frac{e^{-1+i}}{4}$$

Le résidu en $z_2 = -1-i$ ($\mathrm{Res}(f,z_2)$)

$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \lim_{z\to -1-i}\left(z-(-1-i)\frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\right)$$
$$= \lim_{z\to -1-i}\left(\frac{e^z}{z^2}\,\frac{\cancel{(z-(-1-i))}}{\cancel{(z-(-1-i))}\,(z-(-1+i))}\right) = \lim_{z\to -1-i} \frac{e^z}{z^2} \times \frac{1}{(z-(-1+i))}$$

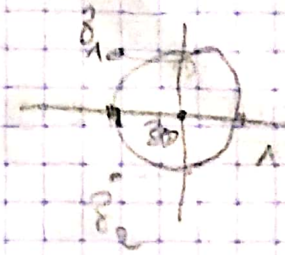
$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \frac{e^{-1-i}}{(-1-i)^2} \times \frac{1}{-2i} = \frac{e^{-1-i}}{4}$$

Si $z = z_0$ un pôle simple et $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,
$Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$
alors $\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$
la règle de l'hôpital

Donc : $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz = 0 + \frac{e^{-1+i}}{4} + \frac{e^{-1-i}}{4} =$

$= \frac{e^{-1}}{2}\left(\frac{e^{i}+e^{-i}}{2}\right)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)} = \frac{e^{-1}}{2}\cos(1)$$



(b) Si $\|z\|=1$

Le seul pôle intérieur à $\|z\|=1$ est $z_0=0$

et on a $Res(f(z_0))=0$, on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz = 0$$

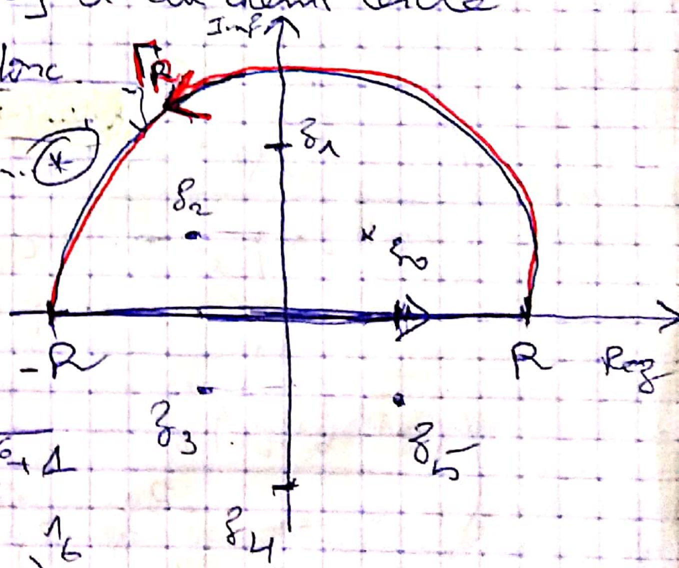
Exercice 5 :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$

Soit $I = \int_C \frac{dz}{z^6+1}\,dz$, où C désigne le contour fermé formé du segment $[-R,R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct, donc

$C=[-R,R]\cup\Gamma_R$

$$I = \int_C \frac{dz}{z^6+1}\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^6+1} + \int_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^6+1} \quad (*)$$



D'autre part :

Les points singuliers de $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ sont les racines de z^6+1.

$z^6+1=0 \Leftrightarrow z^6=-1 \Leftrightarrow z=(-1)^{\frac{1}{6}}$

$\Leftrightarrow z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_1 = e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $z_3 = e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $z_4 = e^{\frac{9\pi}{6}i}$,

$z_5 = e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

on $z^6 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow z_k = e^{i(\pi+2\pi k)\cdot\frac{1}{6}}$, $k=0,1,2,3,4,5$

les valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^6+1}$.
seuls les pôles $z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_1 = e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$

sont à l'intérieur de C,

[car $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_4 = -i$, $z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$]

Donc d'après le théorème des Résidus

$$\int_C \frac{dz}{z^6+1}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,z_0) + \mathrm{Res}(f,z_1) + \mathrm{Res}(f,z_2)\right).$$

si z_0 est pôle simple tq $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$.

Calcule $\mathrm{Res}(f,z_i)$, $i = 0,1,2$.

En utilisant la règle de l'hôpitale

$P(z) = 1$, $Q(z) = z^6+1$

$Q'(z) = 6z^5$

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{1}{6\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^5}$$

$$= \frac{1}{6e^{\frac{5\pi}{6}i}} = \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi}{6}i}.$$

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{6\left(e^{\frac{3\pi}{6}i}\right)^5} = \frac{1}{6}e^{-\frac{15\pi}{6}i} = \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi}{2}i}.$$

$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \frac{P(z_2)}{Q'(z} = \frac{1}{6\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^5} = \frac{1}{6}e^{-\frac{25}{6}\pi i}$$

D'où : $$\int_C \frac{1}{z^6+1}\,dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi}{6}i} + \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi}{2}i} + \frac{1}{6}e^{-\frac{25}{6}\pi i}\right\} = \frac{2\pi}{3},$$

i.e, $$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz = \frac{2\pi}{3} \quad \text{---- (1)}$$

$\frac{1}{z^6+1}$ ... $e^{i\theta}$

Si $R \to +\infty$, on obtient

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1}\,dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz = \frac{2\pi}{3}$$

On utilise le fait que :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^6+1}\,dz=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{(Re^{i\theta})^6+1}\,Rie^{i\theta}\,d\theta=0,$$

On obtient : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^6+1}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx=\frac{2\pi}{3}.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=2\int_0^{+\infty}$$

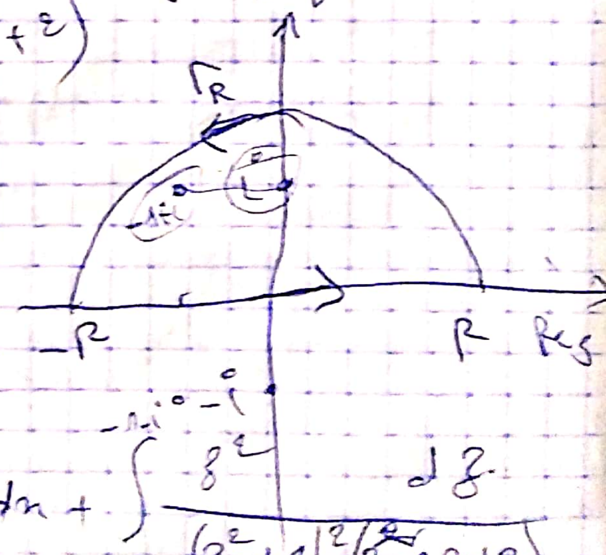
et on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx=\frac{\pi}{3}$$

(b) $\displaystyle f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$

On considère $\displaystyle\int_C\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz$

où $C=[-R,R]\cup\Gamma_R$



$f(z)$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{-R}^{R}f(x)\,dx+\int_{\Gamma_R}f(z)\,dz$$

$$\int_C\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx+\int_{\Gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz$$

Les pôles de $f(z)$ sont, deux pôles double : $z=i$ et $z=-i$
et deux pôle simple $z=-1+i$ et $z=-1-i$
les pôles situés à l'intérieur du contour C sont
$z_1=i$ d'ordre 2 et $z_2=-1+i$ d'ordre 1.

donc d'après le théorème des R.

$$\int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz = 2\pi i\left(Res(f,z_1)+Res(f,z_2)\right)$$

*) $Res(f, z_1=i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right)$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-i)^2}\times\frac{z^2}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right) = \frac{-12+9i}{100}$$

* $Res(f, z_2=-1+i) = \lim_{z\to(-1+i)} \left\{\cancel{(z-(-1+i))}\frac{z^2}{(z^2+1)^2\cancel{(z-(-1+i))}(z-(-1-i))}\right\}$

$$= \lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-(-1-i))}\right\} = \frac{3-4i}{25}$$

D'où $$\oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{-12+9i}{100}+\frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7\pi}{50}$$

Donc $$\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx + \int_{\Gamma_R}\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

Si $R\to+\infty$, on remarquons que le deuxième intégrale tend vers zéro car

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})^2\times Rie^{i\theta}\,d\theta}{((Re^{i\theta})^2+1)^2((Re^{i\theta})^2+2Re^{i\theta}+2)}$$

Donc $$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{7\pi}{50}$$