...$\overline{6}$ ... $\overline{6}$ ... 6 ... 6

rème 3 :

Exercice 1 :

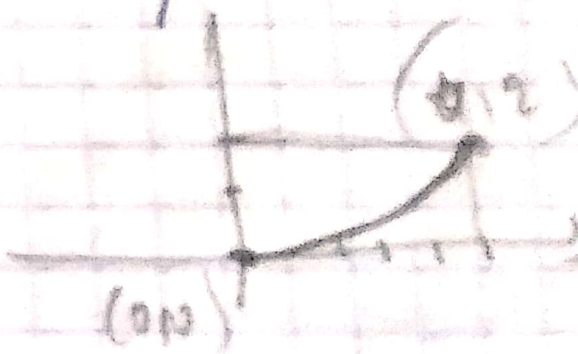
Évaluons $I = \int \bar{z}\,dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$

dans le cas où

a) La courbe C définie par $z(t) = t^2 + it$ (c un parabole paramétrée par les chemins de)

les points $z = 0$ et $z = 4 + 2i$ sur C correspondant à

$t = 0$ et à $t = 2$



donc : $I = \int_C f(z)\,dz = \int_0^2 f(z(t))\,z'(t)\,dt$

$z'(t) = (2t + i)\,dt$

$I = \int_0^2 \overline{(t^2+it)}\,(2t+i)\,dt$ $\quad \gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) =$

$= \int_0^2 (t^2 - it)(2t+i)\,dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\,dt = 10 - \frac{8}{3}i$

Autre méthode : si $f = u + iv$, $z = x(t) + iy(t)$ $\left| \begin{array}{l} u = x \\ v = -y \end{array}\right.$

$$I = \int_C (x - iy)(dx + i\,dy) = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$$

$$= \int_C x\,dx + y\,dy + i(-y\,dx + x\,dy)$$

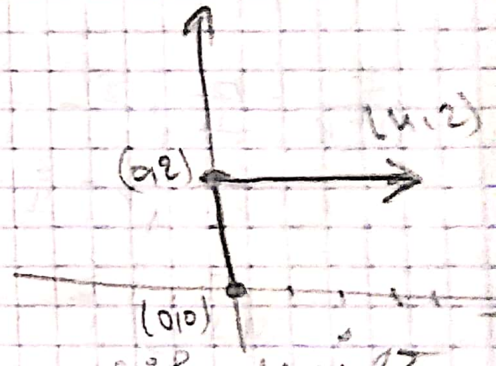
Les équations paramétriques de C sont $x(t) = t^2$, $y(t) = t$ de $t = 0$ à $t = 2$, donc

$$I = \int_0^2 (t^2)(2t\,dt) + (t\,dt) + i\int_0^2 -t\cdot(2t\,dt) + t^2\,dt$$

$$= \int_0^2 (2t^3 + t)\,dt + i\int_0^2 (-t^2)\,dt = 10 - \frac{8}{3}i$$

b)

$$I = \int_C \bar{z}\,dz = \underbrace{\int_{(0,0)}^{(0,2)} \bar{z}\,dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{(0,2)}^{(4,2)} \bar{z}\,dz}_{I_2}$$



$$I = \int_C \bar{z}\,dz = \int_C (x - iy)(dx + i\,dy)$$ si $f = u + iv$

$$= \int_C x\,dx + y\,dy + i(x\,dy - y\,dx)$$

sur le segment de droite $0, 2i$ c-à-d que $\quad [0, 2i]$

*) La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0,0)$ et $(0,2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$ et

$$I_1 = \int_{y=0}^2 y\,dy - (iy)\times 0 = \int_{y=0}^2 y\,dy = 2$$

$[2i, 4+2i]$

*) sur le segment de droite $2i$, $4+2i$ on a $y = 2$, $dy = 0$

d'où : $I_2 = \int_{x=0}^4 x\,dx + 2(0) + i\int_{x=0}^4 (x)(0) - 2\,dx$

$$= \int_0^4 x\,dx + i\int_0^4 (-2)\,dx = 8 - 8i$$

donc $I = I_1 + I_2 = 2 + 8 - 8i = 10 - 8i$.

Exercice 2 :

① $f(z) = \dfrac{\ln z}{z}$, $\gamma : [i, ie]$.

$$\int_{[i,ie]} f(z)\,dz = \int_{[i,ie]} \frac{\ln z}{z}\,dz = \int_{i}^{ie} \frac{\ln z}{z}\,dz = \frac{1}{2}(\ln z)^2 \Big]_{i}^{ie}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\ln ie)^2 - \frac{1}{2}(\ln i)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ln i + \ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln i)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln e^{i\frac{\pi}{2}} + 1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(i\frac{\pi}{2} + 1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(i^2\frac{\pi^2}{4} + 2i\frac{\pi}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}i^2\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_{[i,ie]} f(z)\,dz = \frac{1}{2}i^2\frac{\pi^2}{4} + \frac{i\pi + 1}{2} - \frac{1}{2}i^2\frac{\pi^2}{4} = \frac{1 + i\pi}{2}.$$

② $f(z) = \|z\|^2$, $\gamma : \|z\| = 1$.

Le cercle de centre a et de rayon r est une courbe paramétrée par la fct $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto \gamma(t) = z(t) = a + re^{it}$

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto \gamma(t) = z(t) = e^{it}$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\,ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} ie^{it}\,dt = e^{it}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \underbrace{e^{i(2\pi)}}_{=1} - \underbrace{e^{i(0)}}_{=0}$$

$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi - 1$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

③ $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$, $\gamma : \|z - a\| = r$.

$\gamma : \|z - a\| = r \iff \gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto z(t) = a + re^{it}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

ora $z'(t) = r i e^{it}$ et $f(z(t)) = \dfrac{1}{(z(t)-a)^n}$.

$$f(z(t)) = \frac{1}{(a + re^{it} - a)^n} = \frac{1}{r^n e^{int}}.$$

donc

$$I_n = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{it}}{r^n e^{int}}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^{n-1}} e^{i(t-nt)}\,dt$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}\,dt = \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi}, \text{ si } n \neq 1$$

$$I_n = \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)2\pi}}{i(1-n)} - \frac{1}{i(1-n)} \right],$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{1}{i(1-n)} - \frac{1}{i(1-n)} \right] \quad \left(e^{i(1-n)2\pi} = \underbrace{\cos(1-n)2\pi}_{1} + i \underbrace{\sin(1-n)2\pi}_{0} \right.$$

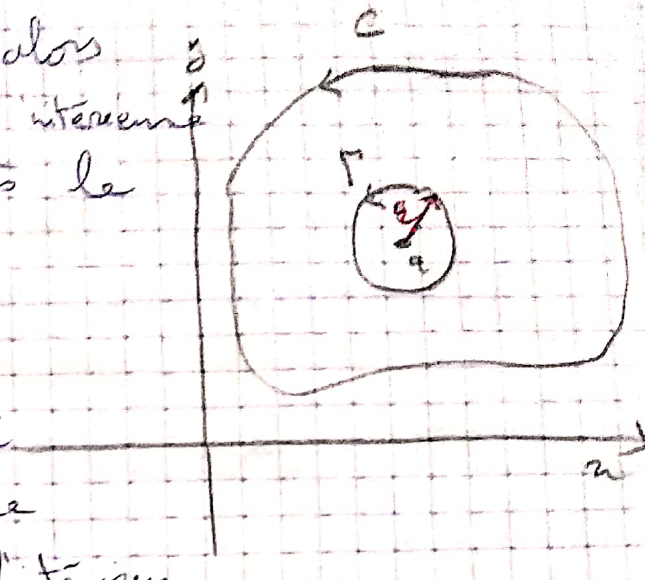
$$I_n = 0, \text{ si } n \neq 1$$

- si $n = 1$, $I_n = \dfrac{i}{r^0} \displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$

donc $I_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{si } n = 1 \end{cases}$

Donc $\int_C z\,dz = \int_{C_1} z\,dz + \int_{C_2} z\,dz$ ...

Exercice 3 :



a) Si a est à l'extérieur de C, alors $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C, alors d'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z-a}\,dz = 0$$

b) Supposons que a intérieur à C.
Soit Γ un cercle de rayon ε et de centre a, tel que Γ soit à l'intérieur de C (ceci peut être réalisé car a est un point intérieur).
D'après une conséquence du théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z-a}\,dz = \oint_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz.$$

D'autre part sur Γ, $|z-a| = \varepsilon \Rightarrow z-a = \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$z = a + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

$\Rightarrow dz = i\varepsilon e^{it}\,dt$.

donc $$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{a}+\varepsilon e^{it}-\cancel{a}} \times i\varepsilon e^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,dt = it\Big]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

donc $$\oint_C \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i.$$

Exercice 4 :

a) $$\oint \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz$$

on a : $$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Donc $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz = \oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}\,dz - \oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}\,dz$

par la formule intégrale de Cauchy :

*) pour $a = 2 \in C$ (est à l'intérieur de C) et $f(z) = \sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)$ est une fct holomorphe dans $C \subset \mathbb{C}$, alors :

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-2}\,dz \Rightarrow \oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}\,dz = 2\pi i\, f(2) = 2\pi i\left(\sin(4\pi)+\cos(4\pi)\right) = 2\pi i.$$

*) pour $a = 1 \in C$, de la même façon

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i(\sin\pi+\cos\pi) = -2\pi i$$

donc $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

b) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$, soit $f(z) = e^{2z}$, $a = -1$.

d'onc, d'après F.I.C $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$

si $n = 3$, alors $f'''(z) = 8e^{2z}$ et $f'''(-1) = 8e^{-2}$.

donc $8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$.

$$\Rightarrow \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = \frac{16\pi i\, e^{-2}}{3!} = \frac{16}{6}\pi i e^{-2} = \frac{8}{3}\pi i e^{-2}.$$

c) $\oint_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}\,dz$?

Les singularités de $z \to \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}$ sont $z_1 = -1$ et $z_2 = 4$.

Seul $z_1 = -1$ est à l'intérieur de C. Alors la fct $f(z) = \frac{e^z}{z-4}$ est holomorphe dans C et donc, par l'applica de la formule intégrale de Cauchy, on aura :

$$\oint_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\, f(-1) = \frac{-2}{5}\pi i\, e^{-1}.$$