

4

Restauration et reconstruction d'images

4.1 Introduction

La différence entre l'amélioration et la restauration est que l'amélioration de l'image est un processus subjectif, alors que la restauration de l'image est un processus objectif. La restauration tente de récupérer une image qui a été dégradée en utilisant une connaissance a priori du phénomène de dégradation. Ainsi, les approches de restauration sont orientées vers la modélisation de la dégradation et l'application du processus inverse afin de récupérer l'image originale.

4.2 Modèles de dégradation d'images

Le processus de dégradation est modélisé comme une fonction de dégradation qui ajoute un terme de bruit additif à une image d'entrée $f(x, y)$ pour produire une image dégradée $g(x, y)$ (voir la Fig. 4.1). Étant donné $g(x, y)$, la fonction de dégradation H et le bruit additif $\eta(x, y)$, l'objectif de la restauration est d'obtenir une estimation $\hat{f}(x, y)$ de l'image originale. Nous voulons que l'estimation soit aussi proche que possible de l'image d'entrée originale et, en général, plus nous connaissons H et η , plus $\hat{f}(x, y)$ se rapproche de $f(x, y)$. L'approche de restauration utilisée dans ce chapitre est basée sur différents types de filtres de restauration d'image.

Il est montré que si H est un processus linéaire, invariant à la position, l'image dégradée est donnée dans le *domaine spatial* par

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y) \quad (4.1)$$

Où $h(x, y)$ est la représentation spatiale de la fonction de dégradation et le symbole \star indique la convolution.

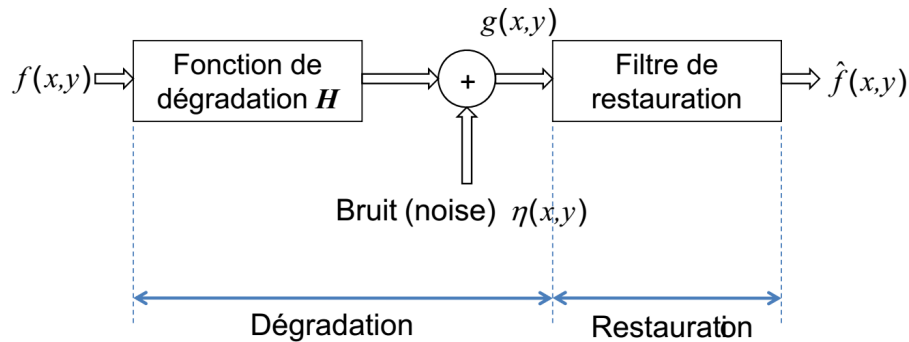


FIG. 4.1: Un modèle pour le processus dégradation/restauration d'image.

Nous savons que la convolution dans le domaine spatial est analogue à la multiplication dans le domaine fréquentiel, nous pouvons donc écrire le modèle dans l'équation. (4.1) dans une représentation équivalente de domaine fréquentiel:

$$G(u, v) = H(x, y)F(u, v) + N(u, v) \quad (4.2)$$

où les termes en majuscule sont les *transformées de Fourier* des termes correspondants dans l'Eq. (4.1). Ces deux équations sont la base de la plupart des approches de restauration dans ce chapitre.

Dans les trois sections suivantes, nous supposons que H est l'opérateur d'identité, et nous ne traitons que les dégradations causées par le bruit.

4.2.1 Modèles de bruit

Les principales causes de bruit surviennent lors de l'acquisition ou/et la transmission de l'image. L'objectif de la restauration est d'obtenir une estimation $\hat{f}(x, y)$ de l'image originale. En général, en connaissant H et η , on obtient $\hat{f}(x, y)$ qui approxime bien $f(x, y)$.

4.2.1.1 Bruit Gaussien (normal)

Le modèle de bruit *Gaussien (Normal)* est très utilisé en pratique. La fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une distribution Gaussienne, z , est donnée par

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.3)$$

où z représente l'intensité, \bar{z} est la *moyenne* de z , et σ est son *écart-type*. L'écart-type au carré, σ^2 , s'appelle la *variance* de z . La Fig. 4.2(a) montre une courbe de cette fonction. Lorsque z est défini par l'Eq. (4.3), environ 70% de ses valeurs seront dans l'intervalle $[(\bar{z} - \sigma), (\bar{z} + \sigma)]$ et environ 95% seront dans l'intervalle $[(\bar{z} - 2\sigma), (\bar{z} + 2\sigma)]$.

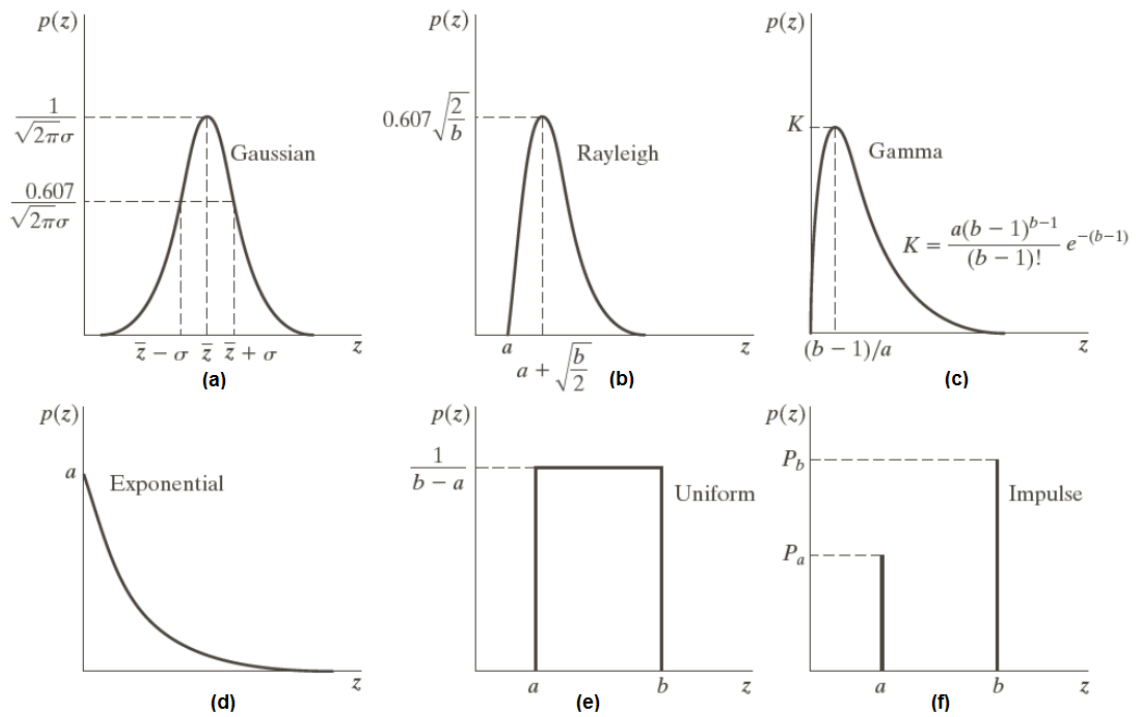


FIG. 4.2: Quelques fonctions de densité de probabilité.

4.2.1.2 Bruit Rayleigh

La fonction de densité de probabilité du bruit de *Rayleigh* est donnée par

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a) \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{b}\right] & \text{si } z \geq a \\ 0 & \text{si } z < a \end{cases} \quad (4.4)$$

La moyenne et la variance de cette densité sont données par

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4} \quad (4.5)$$

La Fig. 4.2(b) montre une courbe de la densité de Rayleigh. Noter le déplacement de l'origine et le fait que la forme de base de cette densité est inclinée vers la droite. La densité de Rayleigh peut être très utile pour l'approximation des histogrammes inclinés.

4.2.1.3 Bruit Gamma (Erlang)

La densité du bruit de *Gamma (Erlang)* est donnée par

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} \exp(-az) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

où $a > 0$, b est un nombre entier positif, et "!" indique le factoriel. La moyenne et la variance de cette densité sont données par

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{b(4 - \pi)}{4} \quad (4.7)$$

La Fig. 4.2(c) montre la courbe de cette densité. L'Eq. (4.6) est appelée la *densité Gamma* lorsque le dénominateur est la fonction Gamma, $\Gamma(b)$. Lorsque le dénominateur est $(b - 1)!$, la densité est appelée *densité d'Erlang*.

4.2.1.4 Bruit exponentiel

La densité du bruit *exponentiel* est donnée par

$$p(z) = \begin{cases} a \exp(-az) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

où $a > 0$. La moyenne et la variance de cette densité sont données par

$$\bar{z} = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2} \quad (4.9)$$

Noter que cette densité est un cas particulier de la densité de Erlang, avec $b = 1$. La Fig. 4.2(d) montre un graphe de cette fonction de densité.

4.2.1.5 Bruit uniforme

La densité du bruit *uniforme* est donnée par

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.10)$$

La moyenne de cette densité est donnée par

$$\bar{z} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et la variance} \quad \sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (4.11)$$

La Fig. 4.2(e) montre un graphe qui représente la densité uniforme.

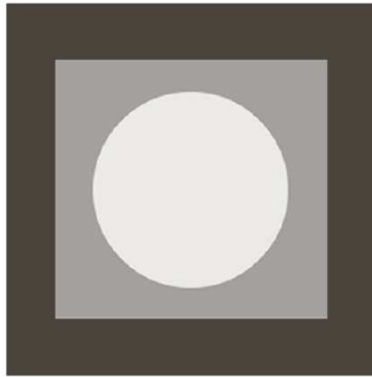


FIG. 4.3: L'image de test utilisée pour illustrer les caractéristiques des densités de bruit montrées dans les Figs. 4.6 et 4.7.

4.2.1.6 Bruit impulsion (sel et poivre)

La densité du bruit *impulsif* (*bipolaire*) est donnée par

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{si } z = a \\ P_b & \text{si } z = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

Si P_a ou P_b est nul, le bruit d'impulsion s'appelle *unipolaire*. Sinon, les valeurs de bruit impulsionnel ressemblent à des granules de sel et de poivre répartis aléatoirement sur l'image. Pour cela, le bruit impulsif bipolaire est également appelé bruit *sel et poivre*.

Pour une image de 8 bits, cela signifie généralement que $a = 0$ (noir) et $b = 255$ (blanc). La Fig. 4.2(f) montre la densité du bruit impulsionnel.

4.2.1.7 Exemple: images bruitées et leurs histogrammes

La Fig. 4.3 montre une image de test utilisée pour illustrer les modèles de bruit que nous avons déjà discuté. Cette image est composée de trois zones simples et constantes qui représentent les niveaux de gris en seulement trois niveaux. Cela facilite l'analyse visuelle des caractéristiques des différentes composantes de bruit ajoutés à l'image.

Les Figs. 4.4 et 4.5 montrent l'image de test après l'addition des six types de bruit discutés dans cette section, ainsi que l'histogramme calculé directement à partir de chaque image.

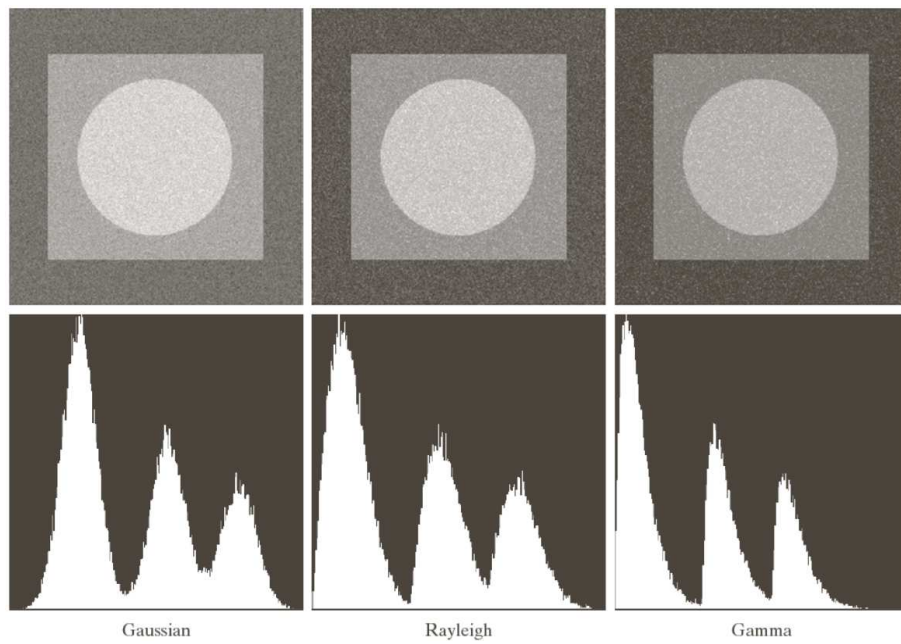


FIG. 4.4: Images et les histogrammes résultants de l'ajout de bruit Gaussien, Rayleigh et Gamma à l'image dans la Fig. 4.3.

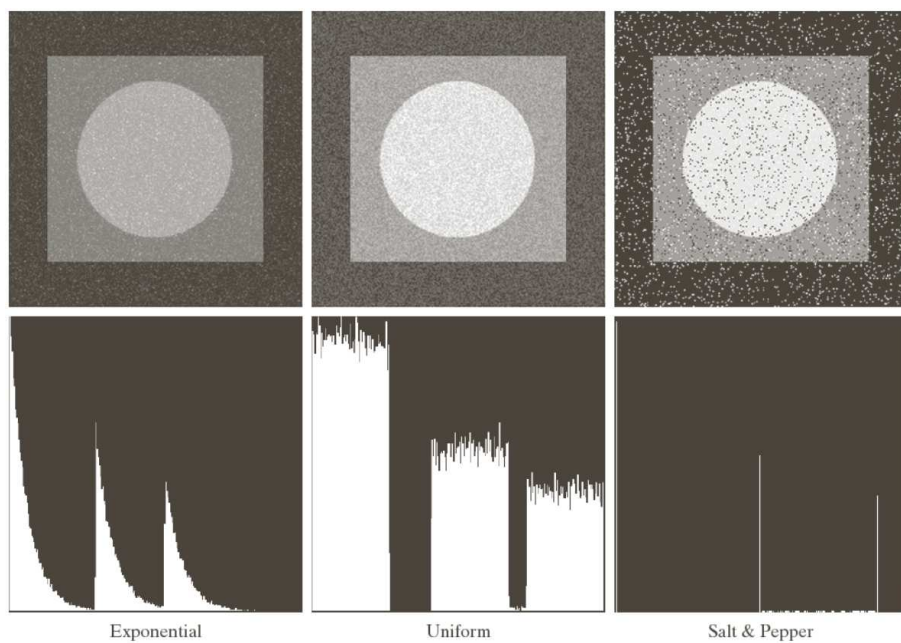


FIG. 4.5: Images et histogrammes résultants de l'ajout des bruits exponentiel, uniforme et de sel-et-poivre à l'image de la Fig. 4.3.

4.3 Restauration d'images bruitées (Filtres spatiaux)

Les filtres spatiaux représentent la meilleure approche utilisée pour réduire le bruit dans le cas de la présence d'un bruit additif aléatoire.

4.3.1 Filtres basés sur la moyenne

4.3.1.1 Moyenne arithmétique

Soit S_{xy} l'ensemble des coordonnées dans une fenêtre (voisinage) de taille $m \times n$, centrée au point (x, y) . La valeur de l'image restaurée \hat{f} au point (x, y) est simplement la *moyenne arithmétique* calculée en utilisant les pixels de la région S_{xy} . En d'autres termes,

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \quad (4.13)$$

Cette opération peut être implémentée à l'aide d'un filtre spatial de taille $m \times n$ dans lequel tous les coefficients ont la même valeur $\frac{1}{mn}$. Un filtre moyen lisse localement l'image pour réduire le bruit.

4.3.1.2 Moyenne géométrique

Une image restaurée avec un filtre de *moyenne géométrique* est donnée par l'expression

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}} \quad (4.14)$$

Ici, chaque pixel restauré est donné par le produit des pixels dans la fenêtre, élevée à la puissance $\frac{1}{mn}$. Un filtre à moyenne géométrique obtient presque le même résultat que le filtre à moyenne arithmétique (voir la Fig. 4.6). Par contre, un filtre à moyenne géométrique préserve mieux les détails de l'image.

4.3.1.3 Moyenne harmonique

Le filtre à *moyenne harmonique* est donnée par l'expression suivante

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}} \quad (4.15)$$

Le filtre à moyenne harmonique fonctionne très bien pour réduire le bruit sel, mais échoue avec le bruit à poivre. Ce filtre fonctionne aussi bien avec d'autres types de bruit tel que le bruit Gaussien.

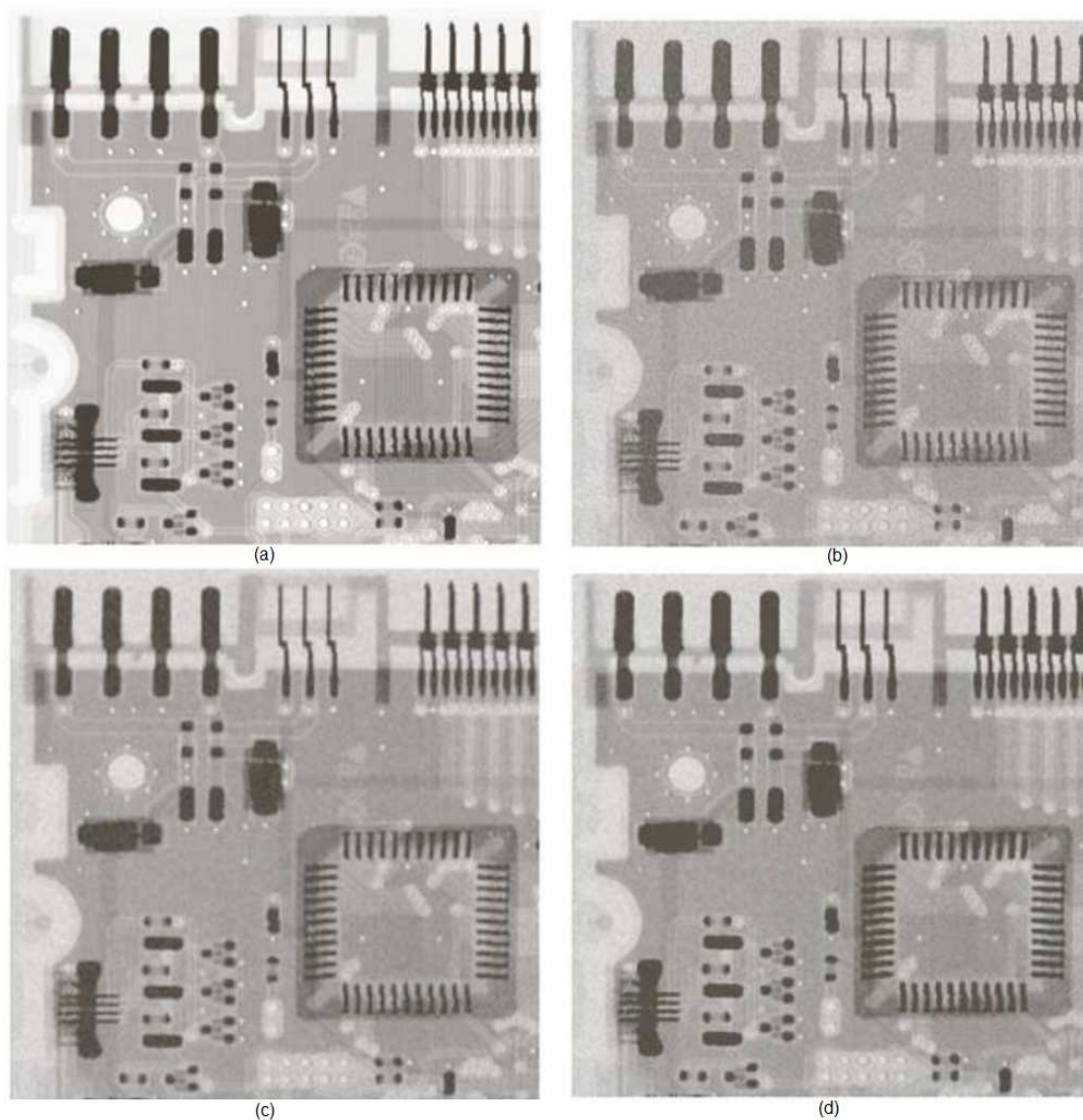


FIG. 4.6: (a) Image radiographique. (b) Image dégradée par un bruit Gaussien additif. (c) Résultat de filtrage avec un filtre à moyenne arithmétique de taille 3×3 . (d) Résultat de filtrage avec un filtre à moyenne géométrique de la même taille.

4.3.1.4 Moyenne contre-harmonique

le filtre à *moyenne contre-harmonique* génère une image restaurée en utilisant de l'expression suivante

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q} \quad (4.16)$$

où Q est appelé *l'ordre du filtre*.

Ce filtre est parfait pour éliminer le bruit poivre et sel. Pour des valeurs positives de Q , le filtre élimine le bruit poivre. Pour les valeurs négatives de Q , il élimine le bruit sel. Il ne peut pas faire les deux en même temps. Notez que le filtre contre-harmonique se réduit au filtre à moyenne arithmétique si $Q = 0$ et au filtre à moyenne harmonique si $Q = -1$.

Les Figs. 4.6(c) et (d) montrent le résultat du filtrage de l'image bruitée avec un filtre à moyenne arithmétique de taille 3×3 et un filtre à moyenne géométrique de même taille, respectivement. Noter que les deux filtres ont réussi à diminuer l'effet de bruit et que le filtre à moyenne géométrique n'a pas un effet de flou autant que le filtre arithmétique.

Les Figs. 4.7(a) et (b) montre la même image dégradée par un bruit poivre et un bruit sel, respectivement. La Fig. 4.7(c) montre le résultat du filtrage de la Fig. 4.7(a) en utilisant un filtre à moyenne contre-harmonique avec $Q = 1.5$, et la Fig. 4.7(d) montre le résultat du filtrage de la Fig. 4.7(b) avec $Q = -1.5$. Les deux filtres ont réussi à réduire le bruit.

En général, les filtres basés sur le calcul arithmétique et géométrique sont bien adaptés pour le bruit aléatoire tel que le bruit Gaussien ou uniforme. Le filtre contre-harmonique est bien adapté pour le bruit impulsif, mais il présente l'inconvénient qu'il faut savoir si le bruit est sombre ou clair afin de choisir le bon signe de Q . Le choix du mauvais signe pour Q peut dégrader d'une manière dramatique la qualité des résultats obtenus. Quelques filtres présentés dans les sections suivantes aident pour éviter cet inconvénient.

Le tableau suivant montre les avantages et les inconvénients des filtres basés sur la moyenne.

| Filtre | Avantages | Inconvénients |
|--------------------------|---|--|
| Moyenne arithmétique | Réduit le bruit. Traite tous les genres de bruit. | Introduit le beaucoup de floue |
| Moyenne géométrique | Réduit le bruit. Garde mieux les détails de l'image que le filtre moyen. Traite tous les genres de bruit. | Sensible aux valeurs nulles des niveaux de gris. |
| Filtre contre-harmonique | Réduit effacement les bruits sel ou (exclusif) poivre. Peut être adapté facilement aux autres types de bruit. | On doit connaître le genre de bruit (ex. sel ou poivre) pour ajuster la constante Q . Sensible aux valeurs nulles. |

4.3.2 Filtres basés sur les statistiques d'ordre

Les filtres de statistiques d'ordre sont des filtres spatiaux dont la réponse est basée sur l'ordre (le classement) des valeurs des pixels contenus dans la zone d'image où s'exécute le filtre. Le résultat du classement détermine la réponse du filtre.

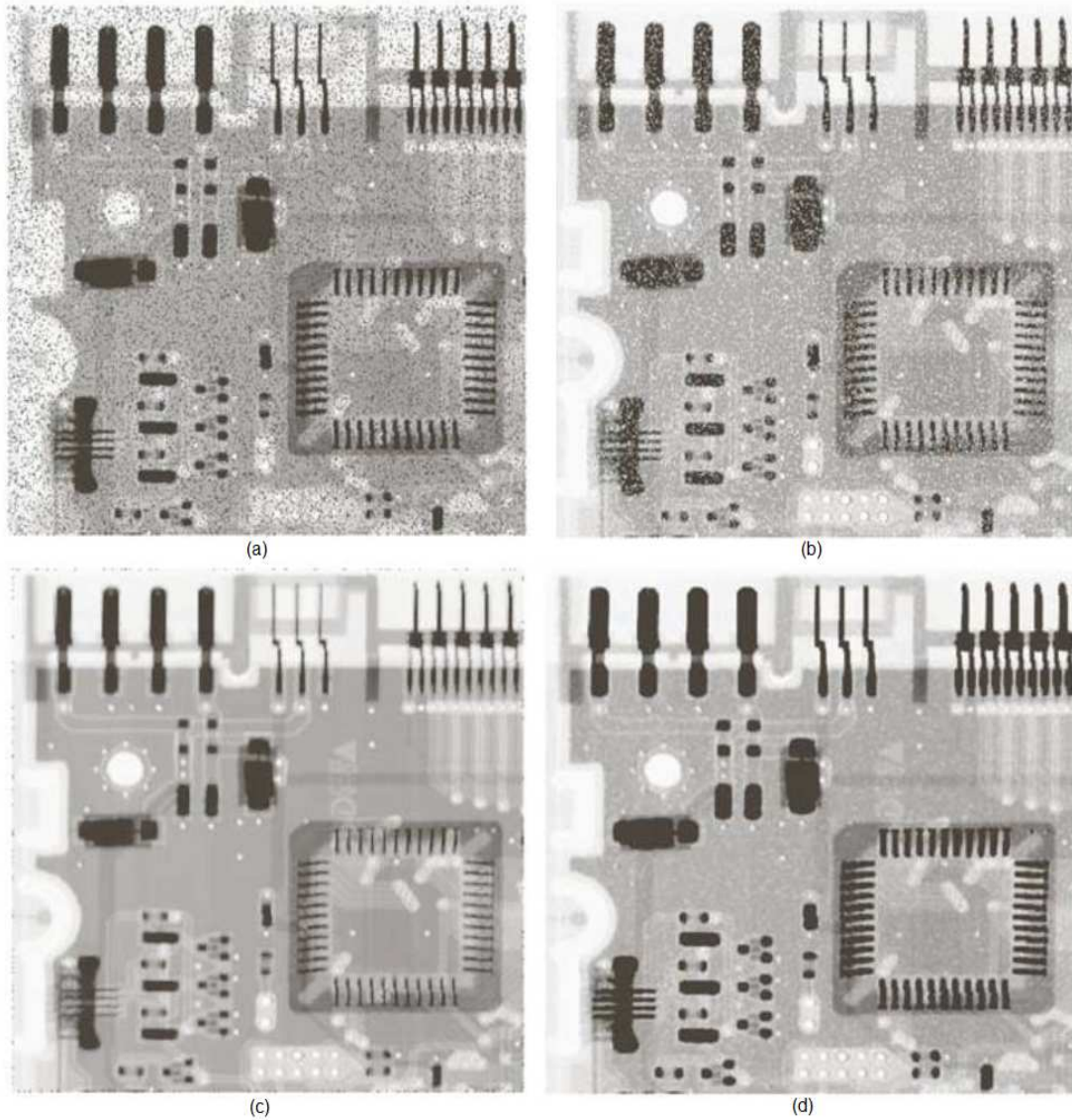


FIG. 4.7: (a) Image dégradée par un bruit poivre avec une probabilité de 0.1. (b) Image dégradée par un bruit sel avec la même probabilité. (c) Résultat du filtrage de (a) avec un filtre contre-harmonique 3×3 de l'ordre de 1.5. (d) Résultat du filtrage de (b) avec $Q = -1.5$.

4.3.2.1 Filtre médiane locale

Le filtre de statistique d'ordre le plus connu est le *filtre médian*, qui, comme son nom l'indique, remplace la valeur d'un pixel par la médiane des niveaux de gris au voisinage de ce pixel:

$$\hat{f}(x, y) = \text{mediane}\{g(s, t)\} \quad \text{avec } (s, t) \in S_{xy} \quad (4.17)$$

Les filtres médians sont très efficaces en présence du bruit impulsif bipolaire et unipolaire. En particulier, le bruit poivre et sel.

4.3.2.2 Filtre max

Bien que le filtre médian soit de loin le filtre statistique d'ordre le plus utilisé dans le traitement d'image, ce n'est en aucun cas le seul. La médiane représente le 50^{ième} percentile d'un ensemble de nombres classés, mais d'autres possibilités peuvent être utilisées. Par exemple, l'utilisation du 100^{ième} percentile dans le *filtre max*, est donné par

$$\hat{f}(x, y) = \max\{g(s, t)\} \quad \text{avec } (s, t) \in S_{xy} \quad (4.18)$$

Ce filtre est très efficace pour trouver les points les plus clairs d'une image. En particulier, le bruit poivre peut être réduit par la sélection du max dans le voisinage S_{xy} .

4.3.2.3 Filtre min

Le filtre 0^{ième} percentile est le *filtre min*

$$\hat{f}(x, y) = \min\{g(s, t)\} \quad \text{avec } (s, t) \in S_{xy} \quad (4.19)$$

Ce filtre est très utile pour trouver les points les plus sombres d'une image. En plus, il réduit le bruit sel à cause de l'opération min.

4.3.2.4 Filtre max-min

Le filtre max-min calcule simplement le point milieu entre les valeurs maximales et minimales dans le voisinage exécuté par le filtre :

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} [\min\{g(s, t)\} + \max\{g(s, t)\}] \quad \text{avec } (s, t) \in S_{xy} \quad (4.20)$$

Noter que le filtre "max-min" combine les statistiques d'ordre et les filtres à moyenne. Il fonctionne mieux pour les bruits aléatoirement distribués, tel que le bruit Gaussien ou le bruit uniforme.

La Fig. 4.8(c) montre le résultat de l'application du filtre "max" à l'image dégradée de la Fig. 4.8(a). Le filtre a supprimé le bruit poivre, mais il a également supprimé quelques pixels des contours des objets sombres. La Fig. 4.8(d) montre le résultat de l'application du filtre "min" à l'image de la Fig. 4.8(b). Dans ce cas, le filtre "min" a supprimé le bruit, mais il a supprimé aussi des pixels blancs autour des contours des objets clairs. Cela a rendu ces objets plus petits et quelques objets sombres plus grands.

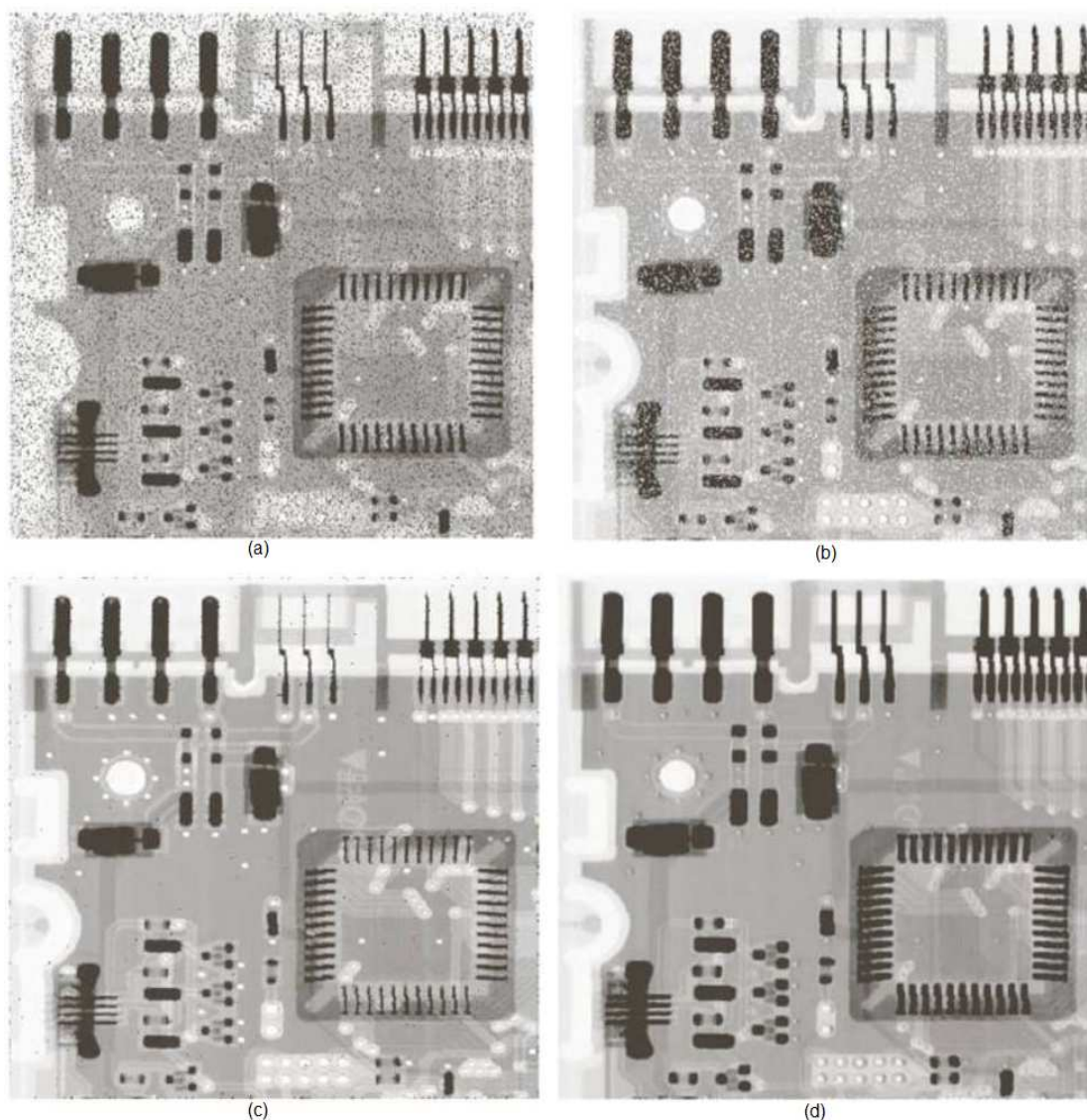


FIG. 4.8: (a) Image dégradée par un bruit poivre avec une probabilité de 0.1. (b) Image dégradée par un bruit sel avec la même probabilité. (c) Résultat du filtrage de (a) avec un filtre "max". (d) Résultat du filtrage de (b) avec un filtre "min".

4.3.3 Filtres adaptatifs

Les filtres proposés précédemment traitent tous les pixels de l'image de manière égale, indépendamment de l'entourage et la position de chaque pixel. Les *filtres adaptatifs* ont un comportement qui se change en fonction des caractéristiques statistiques de la fenêtre traitée par le filtre. Les filtres adaptatifs donnent une bonne performance par rapport à celles des filtres discutés précédemment. Le prix à payer est l'augmentation de la complexité du filtre.

Le filtre adaptatif doit fonctionner sur un voisinage, S_{xy} . La réponse du filtre au centre du voisinage (x, y) est basée sur les paramètres suivants:

- 1) $g(x, y)$, la valeur de l'image bruitée à la position (x, y) ;
- 2) σ_η^2 , la variance du bruit réel qui a corrompu l'image.
- 3) σ_L^2 , la variance locale du voisinage S_{xy} .
- 4) μ_L , la moyenne locale du voisinage S_{xy} .

Nous voulons que le comportement du filtre soit comme suit:

- Si $\sigma_\eta^2 = 0$, le filtre doit retourner simplement la valeur de $g(x, y)$, c-à-d: pas de bruit.
- Si $\sigma_\eta^2 \ll \sigma_L^2$, le filtre doit retourner une valeur proche de $g(x, y)$, c-à-d: présence d'un contour.
- Si $\sigma_\eta^2 = \sigma_L^2$, le filtre doit retourner la moyenne de la région S_{xy} , c-à-d: présence d'une zone homogène.

Une expression adaptative pour obtenir $\hat{f}(x, y)$ en se basant sur ces hypothèses peut être écrite comme suit:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - \mu_L] \quad (4.21)$$

Le tableau suivant montre les avantages et les inconvénients des filtres basés sur les statistiques d'ordre ainsi que les filtres adaptatifs.

| Filtre | Avantages | Inconvénients |
|-----------|---|---|
| Max | Réduit le bruit poivre seulement. | Augmente la taille des régions claires. |
| Min | Réduit le bruit sel seulement. | Augmente la taille des régions sombres. |
| Médiane | Réduit efficacement les bruits sel et/ou poivre. Cette efficacité diminue pour les autres types de bruit. | Aucun. |
| Adaptatif | Réduit le bruit et préserve efficacement les contours de l'image. | On doit connaître à l'avance la valeur du bruit de l'image. |

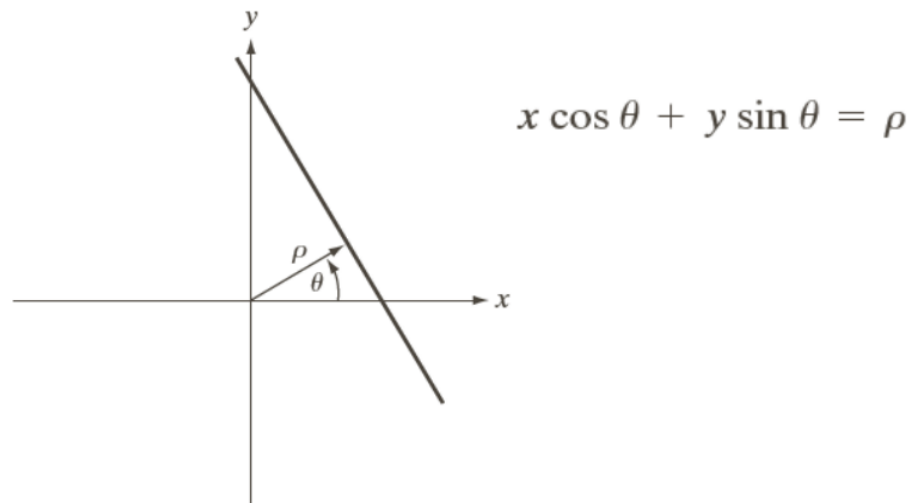


FIG. 4.9: Représentation normale d'une ligne droite.

4.4 Reconstruction des images à partir de projections

Dans cette section, nous allons étudier le problème de la reconstruction d'une image à partir d'une série de projections. Nous allons nous concentrer sur les images obtenues par rayons X dans la *tomographie axiale calculée par ordinateur* (Computerized Tomography) communément appelée *CT-scan*. Soit un objet sur un fond uniforme (on peut supposer que l'image représente une *section transversale d'une région 3D du corps humain*, que le fond représente un *tissu mou uniforme* et l'objet en blanc est une *tumeur*). Cette méthode est considérée parmi les plus utilisés dans le domaine du traitement d'image médicale.

4.4.1 Transformée de Radon

Dans ce qui suit, nous décrivons les mathématiques requises pour la reconstruction d'images dans le contexte de la CT avec rayons X. Une droite dans les coordonnées cartésiennes peut être décrite par sa forme de *pente-intercept*, $y = ax + b$, ou, comme dans la Fig. 4.9, par sa représentation *normale*: $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$

La projection des rayons parallèles peut être modélisée par un ensemble de ces lignes telles que montrée par la Fig. 4.10. Un point quelconque dans la projection est donné par la somme du rayon à travers la ligne $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$. Considérant le cas continue, la somme est une intégrale donnée par

$$g(\rho_j, \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j) dx dy \quad (4.22)$$

où δ représente la fonction d'impulsion. En d'autres termes, le côté droit de l'Eq. (4.22) est nulle sauf si l'argument de δ ne soit pas nul, cela veut dire que l'intégrale est calculée uniquement à travers la ligne $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j$. Si on considère toutes les valeurs de ρ et θ , l'équation précédente se généralise à

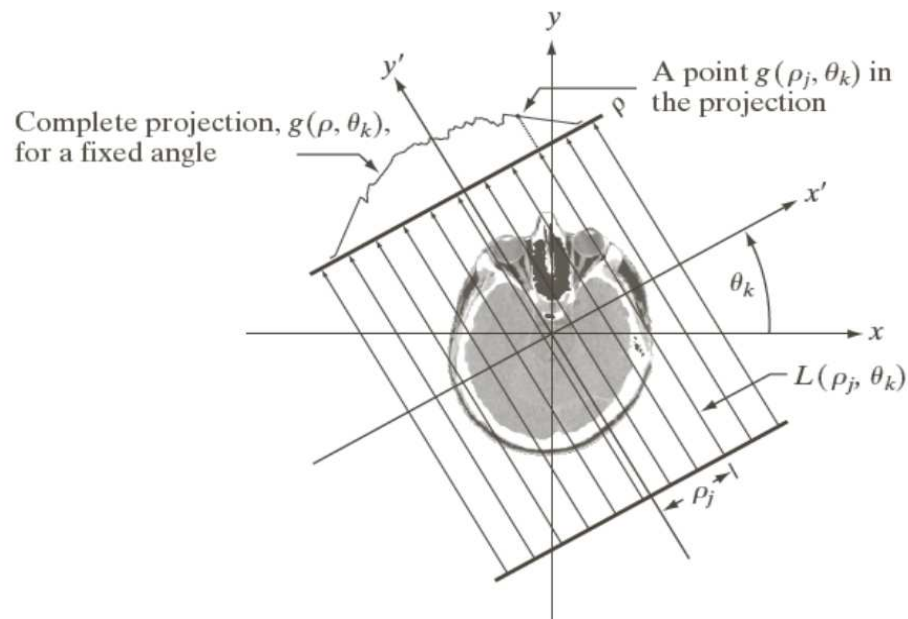


FIG. 4.10: Géométrie des rayons parallèles.

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \quad (4.23)$$

Cette équation, qui donne la projection de $f(x, y)$ à travers une ligne quelconque dans le plan xy , s'appelle la *transformée de Radon*.

Dans le cas discret, l'Eq. (4.23) devient comme suit

$$g(\rho, \theta) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) \quad (4.24)$$

où x , y , ρ et θ sont des variables discrètes. Si on fixe θ et on varie ρ , on voit que l'Eq. (4.24) calcule simplement la somme des pixels de $f(x, y)$ à travers la ligne définie par les valeurs spécifiées de ces deux paramètres. L'incrément de toutes les valeurs de ρ requises pour couvrir l'image (avec θ fixes) donne *une seule* projection. En changeant θ et en répétant la procédure précédente, on obtient une autre projection, et ainsi de suite.

4.4.2 Exemple: utilisation de la transformée de Radon pour obtenir la projection d'un objet circulaire

On suppose que le centre du cercle est l'origine des coordonnées.

$$f(x, y) = \begin{cases} A & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.25)$$

où A est une constante et r est le rayon du cercle. On suppose que le centre du cercle est l'origine des coordonnées. Puisque l'objet est symétrique, les projections sont les mêmes pour toutes les directions. Nous nous contenterons de faire l'analyse pour $\theta = 0^\circ$.

On a $\cos \theta = 1$ et $\sin \theta = 0$, l'Eq. (4.23) devient alors

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \rho) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, y) dy \quad (4.26)$$

Aussi, notons que $g(\rho, \theta) = 0$ pour $|\rho| > r$. Lorsque $|\rho| < r$, l'intégrale est calculée de $y = -\sqrt{r^2 - \rho^2}$ à $y = +\sqrt{r^2 - \rho^2}$

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{+\sqrt{r^2 - \rho^2}} f(\rho, y) dy = \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{+\sqrt{r^2 - \rho^2}} A dy \quad (4.27)$$

Finalement, on aura:

$$g(\rho, \theta) = g(\rho) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - \rho^2} & |\rho| \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.28)$$

La Fig. 4.11(b) montre le résultat. Noter que $g(\rho, \theta) = g(\rho)$, c'est-à-dire que g est indépendante de θ car l'objet est symétrique par rapport à l'origine.

4.4.3 Reconstruction à partir de projections

Lorsque la transformée du Radon est affichée sous forme d'image, le résultat s'appelle un *sinogramme*. Le sinogramme contient les données nécessaires pour reconstruire une fonction $f(x, y)$ (la fonction $g(\rho, \theta)$ est toujours réelle). Les sinogrammes peuvent être interprétés pour des régions simples, mais ils deviennent de plus en plus difficiles à "lire" si la région projetée est plus complexe. Par exemple, voir la Fig. 4.12.

L'objectif de CT est de reconstruire une représentation 3-D d'un volume à partir de ses projections. L'approche consiste à faire la projection inverse (back-projection) des sinogrammes, et sommer les résultats pour générer l'image (image slice). L'empilement de toutes les images va générer l'image 3D de l'objet.

Soit $g(\rho_j, \theta_k)$ un point sur le sinogramme $g(\rho, \theta_k)$ pour une valeur fixe de θ_k (voir la Fig. 4.10). La projection inverse de ce point va reconstruire la ligne $L(\rho_j, \theta_k)$ où la valeur de chaque point de la ligne est $g(\rho_j, \theta_k)$. En répétant Ce processus pour chaque ρ_j (en gardant θ_k fixe), on obtient

$$f_{\theta_k}(x, y) = g(\rho, \theta_k) = g(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k, \theta_k) \quad (4.29)$$

Cette équation est valable pour une valeur quelconque de θ_k . On peut donc écrire en général que l'image formée à partir d'une seule projection inverse obtenue à un angle θ est donnée par

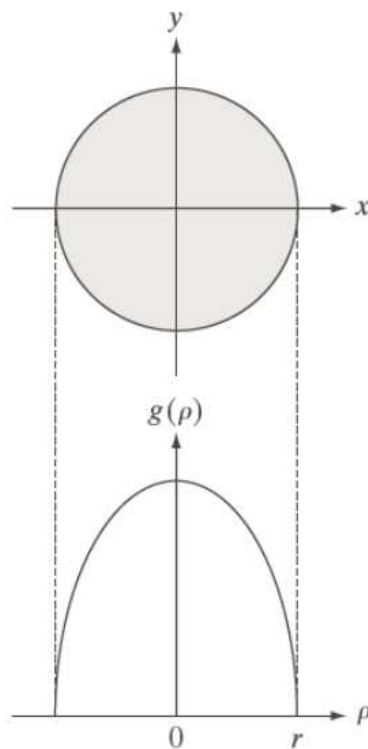


FIG. 4.11: (a) Un cercle. (b) Graphe de la transformée de Radon.

$$f_{\theta}(x, y) = g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \quad (4.30)$$

Finalement, on obtient la projection pour tous les θ en intégrant sur toutes les images projetées en inverse:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} f(\rho, \theta) d\theta \quad (4.31)$$

Dans le cas discret, l'intégrale devient une somme de toutes les images projetées en inverse:

$$f(x, y) = \sum_{\theta=0}^{\pi} f(\rho, \theta) \quad (4.32)$$

Les Eqs. (4.24) et (4.32) ont été utilisées pour générer les Figs, 4.12(c) et (f), qui montrent la projection inverse correspondante aux sinogrammes de la Fig. 4.12(b) et (e), respectivement. Noter la quantité importante de flou, il est donc évident qu'une utilisation directe des Eqs. (4.24) et (4.32) ne va pas donner des résultats satisfaisants. Les anciens systèmes CT étaient basés sur ces équations. Cependant, des améliorations significatives de la reconstruction sont possibles en reformulant cette approche de projection inverse.

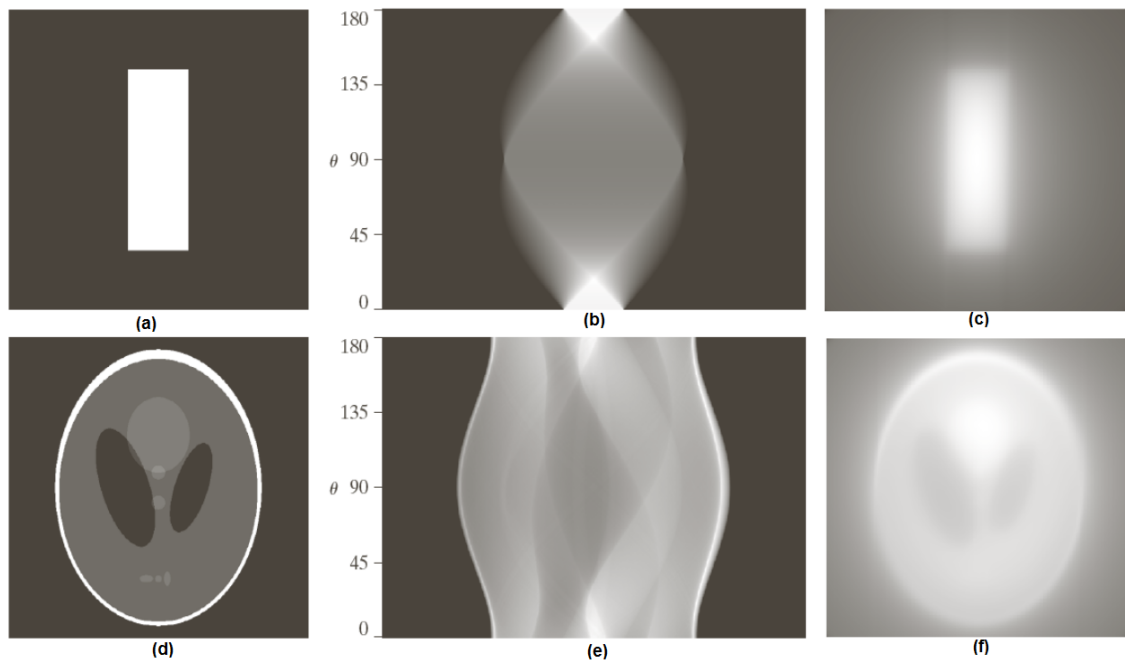


FIG. 4.12: Deux images et leurs sinogrammes (transformée de Radon). Chaque ligne d'un sinogramme est une projection selon l'angle correspondante sur l'axe vertical. L'image en (c) s'appelle le fantôme de *Shepp-Logan*.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les concepts de base et approches fondamentales pour la restauration et la reconstruction d'image. Certaines tâches de restauration sont implémentées en utilisant les masques de convolution. Les approches fréquentielles aussi peuvent être utilisées. La reconstruction d'image est introduite à travers l'exemple de la tomographie calculée par ordinateur (CT) en utilisant une approche qui est la transformée de Radon. Dans le chapitre suivant, nous allons aborder les modèles de couleur de l'image.