المركز الجامعي عبد الحفيظ بو الصوف

معهد العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ماستر

تخصص: اقتصاد نقدي وبنكي

سلسلة التمارين 02 في مادة الاقتصاد القياسي

التمرين 01:

البيانات الآتية تمثل العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة لعينة من خمسة مشاهدات:

Y	X_1	X_2
40	4	8
60	6	12
50	7	10
70	10	5
90	13	7
$\sum Y_i = 310$	**40**	**42**

المطلوب:

- ترجم هذه العلاقة في شكل نموذج خطي.
- قدّر معلمات هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية.
- أحسب معامل التحديد R^2 ثم معامل التحديد المصحح $\overline{R^2}$.

التمرين 02:

لتكن لديك المعطيات التالية الخاصة باقتصاد دولة ما:

$n = 30 \qquad Y = 39 \qquad \bar{X}_1 = 95 \qquad \bar{X}_2 = 96 \qquad \bar{X}_3 = 0.5$

$\sum x_1^2 = 500 \qquad \sum x_2^2 = 986 \qquad \sum x_3^2 = 7.5$

$\sum x_1 y = 650 \qquad \sum x_2 y = -778 \qquad \sum x_3 y = 10$

$\sum y^2 = 978$

المطلوب:

- أكتب النموذج الخطي المتعدد.
- بطريقة المربعات الصغرى العادية قدّر معلمات هذا النموذج.
- أوجد جدول تحليل التباين.

التمرين 03:

بافتراض متغير انتاج محصول العنب Y_i يعتمد على متغيرين هما كمية الماء X_{1i} وساعات العمل X_{2i}. وقد توفرت لدينا البيانات التالية:

$\boldsymbol{Y_i}$	$\boldsymbol{X_{1i}}$	$\boldsymbol{X_{2i}}$
3	3	5
4	5	10
6	6	11
11	6	14
$\sum 24$	$\sum 20$	$\sum 40$

المطلوب:

- أكتب معادلة انحدار i على $\boldsymbol{X_{1i}}$ و$\boldsymbol{X_{2i}}$.
- اختبر معنوية $\widehat{\beta_1}$ و $\widehat{\beta_2}$.
- أوجد قيمة R^2 و$\overline{R^2}$.

التمرين 04:

بأخذ معطيات التمرين 03، المطلوب بناء جدول تحليل التباين مع توضيح مختلف الحسابات.

انتهى.

الحل

التمرين 01:

1- **لدينا نموذج خطي متعدد بمتغير تابع ومتغيرين مستقلين**، وعليه يكتب النموذج بالشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_i$$

2- **تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى العادية (MCO):** (نجري بعض الحسابات اللازمة)

Y	X_1	X_2	y	x_1	x_1^2	x_2	x_2^2	x_1y	x_2y	x_1x_2	y^2
40	4	8	-22	-4	16	-0.4	0.16	88	8.8	1.6	484
60	6	12	-2	-2	4	3.6	12.96	4	-7.2	-7.2	4
50	7	10	-12	-1	1	1.6	2.56	12	-19.2	-1.6	144
70	10	5	8	2	4	-3.4	11.56	16	-27.2	-6.8	64
90	13	7	28	5	25	-1.4	1.96	140	-39.2	-7	784
$\sum Y_i = 310$	**40**	**42**	-	-	**50**	-	**29.7**	**260**	**-84**	**-21**	**1480**

✓ **تقدير النموذج بطريقة المعادلات الطبيعية:**

$$\left.\begin{aligned}\sum x_{1i}y_i &= \hat{\beta}_1 \sum x_{1i}^2 - \hat{\beta}_2 \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{2i}y_i &= \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}x_{i2} - \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2\end{aligned}\right\}$$

بالتعويض:

$$\left.\begin{aligned}260 &= 50\,\hat{\beta}_1 - 21\,\hat{\beta}_2 \dots\dots\dots (1) \\ -84 &= -21\,\hat{\beta}_1 + 29.7\,\hat{\beta}_2 \dots\dots (2)\end{aligned}\right\}$$

بضرب المعادلة (1) بـ 21 والمعادلة (2) بـ 50 نجد:

$$\left.\begin{aligned}5460 &= 10\,50\,\hat{\beta}_1 - 441\,\hat{\beta}_2 \dots\dots\dots (3) \\ -4200 &= -1050\,\hat{\beta}_1 + 1485\,\hat{\beta}_2 \dots\dots (4)\end{aligned}\right\}$$

بالجمع نحصل على:

$$1260 = 10\,44\,\hat{\beta}_2$$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}_2 = 1.2069}$$

$$260 = 50\,\hat{\beta}_1 - 21(1.2069)$$

$$285.3449 = 50\,\hat{\beta}_1$$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}_1 = 5.707}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} + \hat{\beta}_1\overline{X_1} + \hat{\beta}_2\bar{X}_2$$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}_0 = 62 - 5.707(8) - 1.2069(8.4) = 6.20604}$$

وبذلك تكون المعادلة التقديرية هي:

$$\boldsymbol{\hat{Y} = 6.20604 + 5.707X_1 + 1.2064X_2}$$

وتوجد طرق أخرى أيضا من خلالها يمكن استخراج قيم المعالم المقدرة وهي:

✓ **التقدير بطريقة كرايمر (CRAMER):**

$$\begin{bmatrix}\sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}260 \\ -84\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}50 & -21 \\ -21 & 29.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2}\end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta_1}} = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix}260 & -21 \\ -21 & 29.7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}50 & -21 \\ -21 & 29.7\end{vmatrix}} = \frac{5958}{1044} = \mathbf{5.707}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta_2}} = \frac{|A_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix}50 & 260 \\ -21 & -84\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}50 & -21 \\ -21 & 29.7\end{vmatrix}} = \frac{1260}{1044} = \mathbf{1.2069}$$

أما الثابت (القاطع) فيتم تقديره بالطريقة السابقة.

✓ **التقدير بطريقة معكوس المصفوفة**

$$\hat{\beta}_i = (x'x)^{-1}x'y$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{|x'x|}adj\ x'x * x'y$$

من المصفوفة (5):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{1044}\begin{vmatrix}29.7 & 21 \\ 21 & 50\end{vmatrix}\begin{vmatrix}260 \\ -84\end{vmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta_1}} = \frac{1}{1044}[29.7 * 260 - 84 * 21] = \mathbf{5.707}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta_2}} = \frac{1}{1044}[21 * 260 - 50 * 84] = \mathbf{1.2069}$$

أما الثابت (القاطع) فيتم تقديره بالطريقة السابقة.

3- معامل التحديد ^{2} ومعامل التحديد المصحح $\overline{R^2}$:

يعدّ معامل التحديد ^{2} مؤشرا على جودة توفيق خط الانحدار، فهو يحسب بقسمة الانحرافات الموضحة (المشروحة) على الانحرافات الكلية:

$$R^2 = \frac{\sum \widehat{y^2}}{\sum y^2} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

SST: الانحرافات الكلية.

SSR: الانحرافات الموضحة.

SSE: الانحرافات غير الموضحة.

وإذا كان لدينا ***K*** من المتغيرات فإن:

$$R^2 = \frac{\widehat{\beta_1}\sum x_{i1}y + \widehat{\beta_2}\sum x_{i2}y + \cdots \ldots \ldots + \widehat{\beta_k}\sum x_{ik}y}{\sum {y_i}^2}$$

في مثالنا هذا لدينا نموذج بثلاث متغيرات (متغير تابع ومتغيرين مستقلين)، تكون قيمة ^{2} هي:

$$R^2 = \frac{\widehat{\beta_1}\sum x_{i1}y + \widehat{\beta_2}\sum x_{i2}y}{\sum {y_i}^2} = \frac{5.707(260) + 1.2069(-84)}{1480} = 0.93$$

ويمكن أيضا حساب قيمة معامل التحديد باستخدام المصفوفات :

$$R^2 = \frac{\widehat{\beta}'x'y}{y'y} = \frac{[5.707 \quad 1.2069]\begin{bmatrix}260\\-84\end{bmatrix}}{1480} = 0.93$$

وتعني هذه القيمة أنّ 93% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع سببها المتغيرات المستقلة الداخلة في النموذج.

أما قيمة معامل التحديد المصحح فتحسب من خلال العلاقة التالية:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}\right] = 1 - \left[(1 - 0.93)\frac{5-1}{5-3}\right] = 0.86$$

التمرين 02:

1- يكتب النموذج الخطي المتعدد كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon_i$$

2- تقدير معلمات النموذج:

باستخدام إحدى طرق التقدير الثلاثة السابقة سوف نتحصل على:

$$\hat{\beta}_0 = -36.64 \quad , \quad \hat{\beta}_1 = 1.05 \quad , \quad \hat{\beta}_2 = -0.25 \quad , \quad \hat{\beta}_3 = 0.1$$

وبذلك يكون النموذج المقدر هو:

$$\hat{Y}_i = -36.64 + 1.05\, X_1 - 0.25\, X_2 + 0.1\, X_3$$

3- جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F
X_1, X_2, X_3	$\sum \hat{y}^2 = 874$	k-1 = 4-1 = 3	$\frac{874}{3} = 291.3$	$F^* = \frac{\sum \hat{y}^2/k-1}{\sum e^2/n-k} = 72.83$
البواقي	$\sum e^2 = 104$	n-k = 30- 4= 26	$\frac{104}{26} = 4$	
الكلي	$\sum y^2 = 978$	n-1 = 29		

التمرين 03:

1- معادلة انحدار i على X_{1i} وX_{2i}:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_i$$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معلمات هذا النموذج نجد:

(نقوم بتطبيق إحدى الطرق الثلاثة السابقة مع إضافة بعض الأعمدة للجدول وإجراء الحسابات اللازمة)

$$\hat{Y}_i = 1 - \frac{2}{3}X_1 + \frac{12}{3}X_2$$

2- اختبار معنوية المعالم $\widehat{\beta_1}$ و $\widehat{\beta_2}$.

نستعمل اختبار ستودت t لاختبار معنوية المعالم كل على حدى:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_k - \beta_k}{\sqrt{\frac{e'e}{n-k}}\sqrt{a_{ij}}}$$

- **اجراء الاختبار بالنسبة لـ** $\widehat{\beta_1}$:

$H_0: \beta_1 = 0$

$$t_c = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{\frac{5}{3}}{4-3}}\sqrt{\frac{42}{27}}} = -0.8102 \quad \text{المحسوبة}$$

وبذلك قيمة ستودنت المحسوبة هي -0.8102، وباستخدام مستوى معنوية 5% عند درجة حرية تساوي 1، فإن القيمة الجدولية تساوي 12.706. وبمقارنة القيمتين المحسوبة والجدولية نقبل فرضية العدم والتي هي $H_0: \beta_1 = 0$ أي أنّ قيمة β_1 لا تختلف معنويا عن الصفر.

بنفس الطريقة نختبر معنوية المعلمة $\widehat{\beta_2}$:

$H_0: \beta_2 = 0$

$$t_c = \frac{\frac{12}{3}}{\sqrt{\frac{\frac{5}{3}}{4-3}}\sqrt{\frac{6}{27}}} = 1.532 \quad \text{المحسوبة}$$

بمقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية 12.706، نقبل فرضية العدم $\beta_2 = 0 :_0$ أي أنه ليس للمتغير X_2 تأثير واضح على المتغير التابع Y_i.

3-قيمة R^2 و$\overline{R^2}$:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} = \frac{32\frac{2}{3}}{38} = 0.86$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1-R^2) = 0.58$$

التمرين 04:

جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F
X_1, X_2, X_3	$\sum \hat{y}^2 = \hat{\beta}'X'Y = 32.8$	k-1 = 3-1 = 2	$\frac{32.8}{2} = 16.4$	$F^* = \frac{16.4}{5.3} = 3.09$
البواقي	$\sum e^2 = e'e = 5.3$	n-k = 4-3= 1	$\frac{5.3}{1} = 5.3$	
الكلي	$\sum y^2 = Y'Y = 38$	n-1 = 4-1=3	$\frac{38}{3} = 12.66$	