المحور الثاني:

الانحدار الخطي المتعدد (Régréssion Multiple)

المحاضرة الأولى:

نموذج الانحدار الخطي المتعدد هو امتداد للنموذج الخطي البسيط حيث أنه يتضمن أكثر من متغير مستقل واحد. في حالة النموذج البسيط كان الأمر يعتمد على متغيرين متغير تابع والآخر متغير مستقل، لكن في حالة النموذج العام (النموذج الخطي المتعدد) قد يتضمن عدد من المتغيرات من بينها قد يكون هناك تابع واحد والعديد من المتغيرات المستقلة.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u_i$$

المتغيرات المستقلة هي X_1 X_2 إلى X_k و β_0 هي الثابت (القاطع) . أي نموذج يتضمن أكثر من متغيرين يعتبر نموذج انحدار متعدد مثل نموذج الاستهلاك قد يتضمن ما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u_i$$

حيث

Y_I تمثل الاستهلاك، X_1 تمثل الدخل، X_2 تمثل السعر، X_3 تمثل الثروة.

إن النماذج المتعددة تكون هي الحالة السائدة والشائعة بالاقتصاد حيث أنه من النادر أن المتغير التابع مفسر من قبل متغير مفسر واحد.

في العادة تكون β_1 مضروبة في 1 وذلك للحصول على الثابت. وتمثل β_1 β_2 β_3

معلمات الميل والتي تمثل مدى استجابة المتغير التابع للتغيرات في X_1 وX_2 وX_3

. يتضمن نموذج الانحدار عدد من المتغيرات المستقلة يساوي K-1 .

2. الفرضيات الأساسية للنموذج الخطي المتعدد:

هي نفس الفروض التي يستند عليها النموذج البسيط لكي نتحصل على النموذج المقدر :

-1 u_I يتوزع طبيعيا.

-2 $E(u_i)=0$ متوسط يساوي الصفر (التوقع الرياضي للأخطاء يساوي صفر).

أي أنه ليس هناك خطأ تحديد، وبالتالي نتوقع أن تكون المقدرات غير متحيزة (غير متحيزة بمعنى قيمتها غير مرتبطة بمتغير آخر).

-3 التباين المشترك (التغاير) $COV(u_i,u_j)=0$ عندما تكون i≠j . وبالمقابل لو كانت j= i فإن $COV(u_i,u_j)=COV(u_i,u_j)=V(u_i)^2$

-4 المتغيرات المستقلة غير عشوائية أي ثابتة في المعاينات المتكررة.

-5 عدد المشاهدات **n** يفوق عدد المتغيرات **k** أي أن **n > K** ويؤدي هذا إلى درجات حرية في حالة نموذج المتغيرين: يكون التباين $V(u_i)=\frac{\sigma^2}{n-2}$ في الحالة العامة يكون التباين $V(u_i)=\frac{\sigma^2}{n-k}$ بحيث تقيس K عدد المتغيرات المتضمنة في النموذج كافه، وكلما كانت **n > K** يؤدي إلى المزيد من درجات الحرية وبالتالي إلى المزيد من دقة القياس. حيث يستعمل التباين في

قياس دقة المقدرات فكلما كان التباين قليل كلما كان الأمر أفضل. إذا كانت **n >** **K** النتيجة سيكون المقام كبير وتقل قيمة مقدرة التباين $\hat{\sigma}^2$ وكلما قل تباين $\hat{\beta}^2$ كلما تحسن قياسها.

-6 لا توجد علاقة خطيه بين المتغيرات المستقلة. على سبيل المثال لا توجد علاقة بين X_1 , X_2 أو كمايلي:

$$X_2 = X_3 \quad \text{أو} \quad X_3 = 2X_4 \quad \text{أو} \quad X_2 = X_3 + X_4$$

لا حظ أنه إذا كانت $2X_1 + X_2 = 4$ فإننا نستطيع أن نعبر عن X_2 بقيمه لـ X_1

ويمكن استخدامها في علاقة الانحدار $X_2 = 4 - 2X_1$

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 (4 - 2X_1) + u$$

$$Y = (\alpha + 4\beta_2) + (\beta_1 - 2\beta_2) X_1 + u$$

نستطيع أن نقدّر القيم بين الأقواس ولا نستطيع أن نقدر المعالم $\beta_1 , \beta_2 , \alpha$ بمفردها.

للحصول على النموذج المقدر نتبع إحدى الطرق التالية:

1- طريقة المربعات الصغرى العادية.

2- طريقة المعقولية (الإمكانية) العظمى.

سوف نكتفي بطريقة التقدير بالمربعات الصغرى العادية فقط.

طريقة المربعات الصغرى العادية :

المعيار الذي تعتمد عليه طريقة المربعات الصغرى العادية في الحصول على المقدرات هو تصغير مجموع مربعات البواقي إلي أدنى قيمه لها. أي أن المعيار تصغير $\sum u_i^2$

أي تحويل مربعات البواقي إلي شكل تظهر فيه المقدرات المراد الحصول عليها، ويتسنى ذلك بإعادة كتابة المعيار على النحو التالي:

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 .... \hat{\beta}_k X_k)^2$$

تفاضل البواقي بالنسبة لـ $\hat{\beta}_o$ يساوى بالصفر ويعاد كذلك لقيم $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 ... \hat{\beta}_k$ وهكذا

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = +2\sum (Y_I - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2 .. \hat{\beta}_K X_K) = 0$$

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum X_{I1} (Y_I - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_2 X_2 - \hat{\beta}_3 X_3 .. \hat{\beta}_K X_K) = 0$$

.

.

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \hat{\beta}_K} = -2\sum X_{IK} (Y_I - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_2 X_2 - \hat{\beta}_3 X_3 .. \hat{\beta}_K X_K) = 0$$

بفك الأقواس والقسمة على 2 وإعادة كتابة المعادلات الطبيعية مقابلة للنموذج الخطي المتعدد:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_i$$

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2)^2$$

نحصل على مقدرات النموذج الخطي المتعدد. على سبيل المثال سنكتفي بنموذج بثلاث متغيرات:

$$\sum Y_I = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}$$

$$\sum X_{1I} Y = \hat{\beta}_0 \sum X_{1I} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1I}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{1I} X_{2I}$$

$$\sum X_{2I} Y = \hat{\beta}_0 \sum X_{21I} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1I} X_{2I} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2I}^2$$

وباستخدام الانحرافات نتحصل على:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

مثال تطبيقي:

لتكن لديك المعطيات التالية، والمطلوب قدّر معلمات النموذج الخطي المتعدد:

Y	X_1	X_2
40	6	4
44	10	4
46	12	5
48	14	7
52	16	9
58	18	12
60	22	14
68	24	20
74	26	21
80	32	24
570	**180**	**120**

الحل:

نحسب أولا قيمة المتغيرات في شكل الانحرافات (العمود 4، العمود 5، العمود 6) ونجري مختلف الحسابات اللازمة (أنظر جيدا إلى علاقة كل مقدّر من مقدرات النموذج):

Y	X_1	X_2	y	x_1	x_2	x_1y	x_2y	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
40	6	4	-17	-12	-8	204	136	96	144	64
44	10	4	-13	- 8	-8	104	104	64	64	64
46	12	5	-11	- 6	-7	66	77	42	36	49
48	14	7	- 9	- 4	-5	36	45	20	16	25
52	16	9	- 5	- 2	-3	10	15	6	4	9
58	18	12	+ 1	0	0	0	0	0	0	0
60	22	14	+ 3	+4	+2	12	6	8	16	4
68	24	20	+11	+6	+8	66	88	48	36	64
74	26	21	+17	+8	+9	136	153	72	64	81
80	32	24	+23	+14	+12	322	276	168	196	144
570	**180**	**120**	**0**		**0**	**956**	**900**	**524**	**576**	**504**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{(956)(504) - (900)(524)}{(576)(504) - (524)^2} = 0.65$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{(900)(576) - (956)(524)}{(576)(504) - (524)^2} = 1.11$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 = 57 - (0.65)(18) - (1.11)(12) = 31.98$$

$$\hat{Y}_1 = 31.98 + 0.65X_{1i} + 1.10X_{2i} + u$$