الفصل الثاني:

الفائدة المركبة والدفعات

I.الفائدة المركبة:

1-تعريف الفائدة المركبة:

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة التي تُحسب على أساس أصل المبلغ مضاف إليه الفوائد المتولدة عن الفترات السابقة، وهي بهذا تختلف عن الفائدة البسيطة كون هذه الأخيرة تُحسب فقط على أساس أصل المبلغ مهما كان عدد الوحدات الزمنية.

وتُستعمل في الغالب الفائدة المركبة للاقتراض طويل الأجل بينما تُحسب الفائدة البسيطة على الاقتراض قصير الأجل.

مثال توضيحي:

تم إيداع مبلغين من المال قدر كل واحد منهما يساوي 1600وحدة نقدية ولمدة 3 سنوات لكل منهما وأودع كلاهما بمعدل فائدة سنوي 6% لكن الأول بفائدة بسيطة والثاني بفائدة مركبة.

جدول الفائدة البسيطة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
2	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
3	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600

جدول الفائدة المركبة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	96=0.06*1600	1696=96+1600
2	1696	101.76=0.06*1696	1797.76=101.76+1696
3	1797.76	107.87=0.06*1797.76	1905.63=107.87+1797.76

2-قانون الفائدة المركبة:

لنفترض أن:

C : أصل المبلغ

i : معدل الفائدة

n : المدة بالسنوات

الفترات	رأس المال في بداية الفترة (1)	فائدة الفترة (2)	القيمة المحصلة في نهاية الفترة (الجملة) (2+1)
1	C	Ci	$C+Ci=C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i)+C(1+i)i=C(1+i)[1+i]=C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2+C(1+i)^2 i=C(1+i)^2[1+i]=C(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2} i$	$C(1+i)^{n-2}+C(1+i)^{n-2} i=C(1+i)^{n-2}[1+i]=C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-1} i=C(1+i)^{n-1}[1+i]=C(1+i)^n$

نستنتج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة i لكل وحدة زمنية تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{C_n = C(1+i)^n}$$

وهي تمثل القانون الأساسي للفائدة المركبة.

وقانون الفائدة المركبة يُعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف (الجملة) بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة. ولحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = C(1+i)^n - C \Rightarrow \boxed{I = C[(1+i)^n - 1]}$$

3-طرق حساب الجملة المركبة:

طريقة الجداول المالية: إن طريقة الجداول المالية تُعد الأكثر شيوعا واستخداما لما توفره من وقت وتدخره من مجهودات. ولقد أُعد الجدول الأول من هذه الجداول على أساس القيمة المحصلة للوحدة النقدية الواحدة بمعدلات فائدة مركبة متغيرة ولمدد مختلفة لكل معدل منها، فإذا ما قاطعنا بين المعدل المعين والفترة المحددة نحصل على الجملة المركبة التي تنتجها وحدة نقدية واحدة موظفة بذلك المعدل وتلك المدة. ومن البديهي انه لحساب جملة مركبة لمبلغ معين بنفس المعدل ونفس المدة ما علينا إلا أن نضرب الجملة المركبة للوحدة النقدية في ذلك المبلغ.

طريقة اللوغارتم: يُمكن استخدام هذه الطريقة لحساب الجملة وخاصة إذا كانت الفترة كسرية أو عدم وجودها في الجداول المالية، وكذلك عدم وجود معدل الفائدة في الجداول المالية.

تذكير:

$$\log x^y = y\log x$$

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

مثال:

أودع احد الأشخاص مبلغ من المال قدره **3500** وحدة نقدية لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب **6%** ولمدة **7** سنوات.

المطلوب:

1-احسب جملة المبلغ؟

2-احسب الفائدة المتحصل عليها؟

الحل

C=3500 وحدة نقدية

i=6%

n=7 سنوات

حساب جملة المبلغ:

طريقة الجداول المالية:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1+0.06)^7 = 3500(1.503630259)$$

حيث استخرجنا قيمة $(1.06)^7$ من الجدول المالي رقم 1.

$$\boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

طريقة اللوغاريتم:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1+0.06)^7 \Rightarrow C_7 = 3500(1.06)^7$$

$$LogC_7 = Log3500 + Log(1.06)^7 \Rightarrow LogC_7 = Log3500 + 7Log(1.06)$$

$$LogC_7 = 3.544068044 + 7(0.025305865) = 3.721209101$$

$$C_7 = 10^{3.721209101} = \boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

حساب الفائدة المتحصل عليها:

يتم حساب قيمة الفائدة سواء من خلال طرح أصل المبلغ من الجملة المركبة المتحصل عليها بإحدى الطرق السابقة أو باستخدام قانون حساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = 5262.71 - 3500 = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

أو:

$$I = C[(1+i)^n - 1] = 3500[(1+0.06)^7 - 1]$$

$$I = 3500[(1.06)^7 - 1] = 3500[1.50363026 - 1] = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

إيجاد الجملة المركبة في حالة المدة غير الكاملة (تحتوي شهور و/ أو أيام):

عندما تحتوي المدة أجزاء من السنة (شهور، أيام)، فإن هناك عدة طرق تساعدنا على إيجاد الجملة المركبة، نذكر منها اثنتان:

الطريقة الرياضية: وتعتمد على مبادئ الرياضيات المالية وتتمثل في استعمال الجدول المالي رقم 1 لحساب $(1+i)^n$ للسنوات الكاملة بينما تُستعمل الجداول الملحقة المخصصة للشهور أو الأيام للمدة الباقية المرافقة لعدد السنوات الكاملة. ونجد الجملة كما يلي:

$$C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^{n+\frac{m}{12}} \Rightarrow \boxed{C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^n (1+i)^{\frac{m}{12}}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ بـ $\frac{j}{360}$

الطريقة البنكية: حسب هذه الطريقة المستعملة في البنوك عمليا، يتم حساب قيمة الفائدة للفترات أو السنوات الكاملة بعلاقة جملة الفائدة المركبة، أما ما يتعلق بالأيام أو الشهور فتُستعمل علاقة الفائدة البسيطة.

$$\boxed{C_{n,\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i \frac{m}{12}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ ب $\frac{j}{360}$

إيجاد الجملة المركبة في حالة المعدل غير مجدول: عندما يكون معدل الفائدة المركب غير موجود في الجدول المالي، فإنه يُمكن إتباع عدد من الطرق منها الطريقة اللوغاريتمية.

إيجاد الجملة في حالة المعدل يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،...الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بضرب عدد المرات التي يُطبق فيها المعدل في السنة في عدد السنوات.

4- عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:

1- أصل المبلغ مجهول : انطلاقا من القانون الأساسي للفائدة المركبة، يُمكن إيجاد المبلغ المستثمر في بداية المدة n ويُدعى أيضا بالقيمة الحالية للجملة مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C = \frac{C_n}{(1+i)^n} \Rightarrow \boxed{C = C_n(1+i)^{-n}}$$

ويُمكن إيجاد C بالطريقة اللوغاريتمية أو طريقة الجداول المالية، ونستخدم عند تطبيق الطريقة الأخيرة الجدول المالي رقم 2 يُمكن استخراج قيمة $(1+i)^{-n}$ ومن تم إيجاد قيمة أصل المبلغ.

2- معدل الفائدة مجهول: لإيجاد معدل الفائدة، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام الطريقة اللوغاريتمية أوطريقة الجداول المالية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد معدل الفائدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow LogC_n = LogC + nLog(1+i) \Rightarrow$$

$$Log(1+i) = \frac{LogC_n - LogC}{n} \Rightarrow \boxed{i = 10^{\left(\frac{LogC_n - LogC}{n}\right)} - 1}$$

طريقة الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد معدل الفائدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في السطر الذي يقابل المدة n (معلومة). والمعدل (العمود) المقابل هو المعدل المطلوب.

إيجاد معدل الفائدة في حالة قيمة حاصل $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي : في حالة أن حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ لا يوجد في الجدول المالي فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ عند السطر التي تقع فيه المدة المعلومة ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير بـ i_1 والمعدل الصغير بـ i_2؛

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = \frac{(i_1 - i_2)\times(\frac{C_n}{C} - x_2)}{(x_1 - x_2)} + i_2}$$

3- المدة مجهولة: لإيجاد مدة إيداع أو مدة الاقتراض، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام الطريقة اللوغاريتمية أو طريقة الجداول المالية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد المدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow LogC_n = LogC + nLog(1+i) \Rightarrow \boxed{n = \frac{LogC_n - LogC}{Log(1+i)}}$$

طريقة الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجداول المالية لإيجاد المدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في العمود الذي يقابل المعدل وعند الوصول إلى تلك القيمة يُمكن تحديد المدة (عند السطر المقابل).

إيجاد المدة في حالة قيمة حاصل $\frac{C_n}{C}$ لا توجد في الجدول المالي : في حالة أن حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ لا يوجد في الجدول المالي فإننا نقوم بما يلي:

نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ عند العمود التي يقع فيه معدل الفائدة المركب المعلوم ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى بـ x_2.

ويتم إيجاد عدد الأيام بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{j = \frac{\left(\frac{C_n}{C} - x_2\right) \times 360}{(x_1 - x_2)}}$$

ومنه فإن المدة المطلوبة تكون عبارة عن المدة التي تقابل القيمة الصغرى x_2 مضافا إليها عدد الأيام المتحصل عليه من تطبيق القانون السابق.

II.الدفعات:

1-تعريف الدفعات المتساوية:

الدفعات المتساوية هي مبالغ مالية متساوية تُدفع دوريا في فترات متساوية. وتُسمى فترة الدفع أو السداد بالمدة، وقد تكون هذه المدة سنة، سداسي ، ثلاثي...

وتتميز الدفعات المتساوية بعدد من العناصر:

- قيمة الدفعات المقدمة دوريا متساوية؛
- الفترة الفاصلة بين دفعة وأخرى متساوية؛
- معدل فائدة متساوي؛
- تحديد تاريخ أول دفعة وتاريخ آخر دفعة؛
- عدد الدفعات.

2-أنواع الدفعات المتساوية:

في الواقع هناك نوعان من الدفعات المتساوية:

- دفعات عادية يتم بواسطتها تسديد دين، أو تغطية التزام سابق وأحيانا إيداع لتكوين رأس مال على أن الميزة المشتركة فيها هي كونها تُدفع في نهاية الفترات، فيُطلق عليها دفعات عادية، أو تسديد، أو دفعات نهاية المدة.
- دفعات تهدف إلى تكوين رأس مال، فهي تُقدم في بدية الفترات ويُطلق عليها دفعات استثمار أو دفعات بداية الفترة.

3-دفعات نهاية المدة:

3-1-جملة دفعات نهاية المدة:

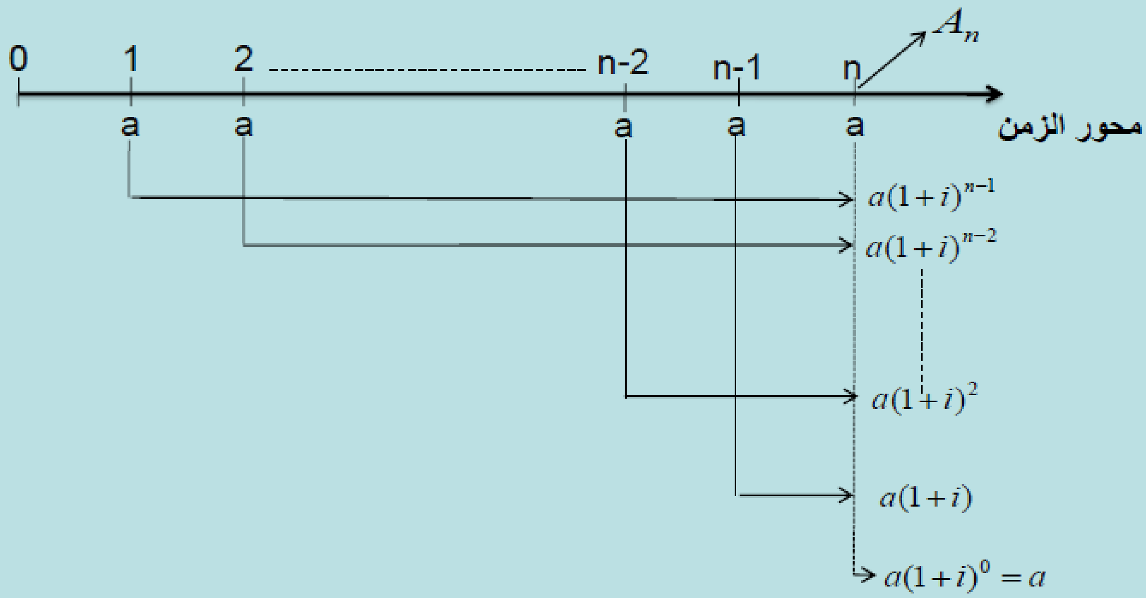
جملة دفعات نهاية المدة هي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد في نهاية عدد من الفترات n. وبالتالي فقد قدم n دفعة متساوية. وللبحث عن جملة مجموع هذه الدفعات يكفي جمع جمل هذه الدفعات في نهاية المدة أي عند أخر السنة n.

3-1-1 قانون جملة دفعات نهاية المدة:

لنفترض أن:

A_n : جملة دفعات نهاية المدة؛
a : قيمة الدفعة الثابتة المتساوية؛
i : معدل الفائدة؛
n: عدد الدفعات.

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وجملها كما يلي:



وجملة الدفعات كاملة A_n تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

وبملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها (1+i) وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية، أي جملة الدفعات يكون كما يلي:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \Rightarrow \boxed{A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

ولحساب جملة الدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 3 الذي يُقدم العلاقة $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول. وفي حالة عدم وجوده يُمكن إستخدام طريقة الحساب البحث.

مثال

يُودع أحد الأشخاص في نهاية كل سنة ولمدة 5 سنوات مبلغ 4000 دج في أحد البنوك بمعدل فائدة 3%.
المطلوب: أوجد الجملة في نهاية السنة الخامسة؟

الحل:

$a = 4000$
$i = 3\%$
$n = 5$

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_5 = 4000\frac{(1+0{,}03)^5 - 1}{0{,}03} = 4000(5{,}3091358)$$

$$\boxed{A_5 = 21236{,}54 \text{ دج}}$$

إيجاد الجملة في حالة المعدل يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،...الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بضرب عدد المرات التي يُطبق فيها المعدل في السنة في عدد السنوات.

3-1-2 استخدام قانون جملة دفعات نهاية المدة:

باستخدام قانون جملة دفعات نهاية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة بطريقتين:

الطريقة الأولى :

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \boxed{a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

الطريقة الثانية:

يُمكن ايجاد قيمة الدفعة بالقانون التالي:

$$\boxed{a = A_n\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right]}$$

ويتم إستخدام الجدول المالي رقم 5 لاستخراج قيمة المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون جملة دفعات نهاية المدة:

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي يقع فيه حاصل القسمة.

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: إذا بحثا في الجدول المالي رقم 3 عن حاصل القسمة ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{A_n}{a}$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى x_2.
- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير ب i_1 والمعدل الصغير بـ i_2.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\times(\frac{A_n}{a} - x_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون جملة دفعات نهاية المدة:

$$A_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي:</u> نبحث عن حاصل القسمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي يقع فيه حاصل القسمة.

<u>الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي:</u> كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 3 عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{A_n}{a}$ ونحدد عدد السنوات أو الدفعات التي تقابل تلك القيمتين.

ومن تم يُمكن الأخذ بأحد الحلين التاليين:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة الجديدة في كل حالة من حالتي عدد السنوات أو الدفعات التين تحصران n المبحوث عنها؛

2- حساب قيمة الدفعة على أساس n التي تقابل القيمة الصغرى التي تحصر حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ ثم نحدد الفارق بين الجملة الإجمالية وجملة n دفعة والفرق يتم تسديده مع الدفعة الأخيرة.

<u>مثال 3-7</u>

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة مبلغ من المال قدره 9070 وحدة نقدية بمعدل فائدة مركب 3,5% ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 82098,799 وحدة نقدية.

<u>المطلوب</u>: أوجد عدد الدفعات؟

<u>الحل:</u>

$A_n = 82098.799$ وحدة نقدية

$a = 9070$ وحدة نقدية

$i = 3.5\%$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+0.035)^n - 1}{0.035} = \frac{82098.799}{9070} = 9.05168677$$

نبحث عن المقدار 9,05168677 في الجدول المالي رقم 3 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 3,5% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل مدة 8 سنوات. إذا: $\boxed{n = 8 \text{ سنوات}}$

<u>مثال 3-8</u>

حتى يستطيع شخص تسديد دين جملته 31200 دج بدفعات لنهاية كل سنة قيمتها 4000 دج لكل منها فكم يلزمه من سنة إذا كان معدل الفائدة المستعمل هو 3%.

<u>الحل:</u>

$A_n = 31200$ دج

$a = 4000$ دج

$i = 3\%$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+0.03)^n - 1}{0.03} = \frac{31200}{4000} = 7.8$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 نجد أن هذا المقدار محصور بين n=7 و n=8 وبالتالي يمكن الأخذ بأحد الحلين التاليين:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة إما مع n=7 أو n=8

حساب قيمة الدفعة مع n=7

$$a=\frac{A_n}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}=\frac{A_7}{\frac{(1+0.03)^7-1}{0.03}}=\frac{31200}{7.662462181}\Rightarrow \boxed{a=4071.8\text{دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=8

$$a=\frac{A_n}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}=\frac{A_8}{\frac{(1+0.03)^8-1}{0.03}}=\frac{31200}{8.892336046}\Rightarrow \boxed{a=3508.64\text{دج}}$$

الحل الثاني:

دفع 7 دفعات متساوية قيمة كل منها 4000 دج و الباقي يُدفع مع الدفعة السابعة:

$$A_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}\Rightarrow A_7=4000\frac{(1+0,03)^7-1}{0,03}=4000(7.662462181)$$

$$A_7=30649.85\text{دج}$$

وبالتالي فإن الباقي الذي يدفع هو: $31200-30649.85=550.15$ دج

2-3القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

1-2-3 قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة هي مجموع القيم الحالية لعدد دفعات نهاية المدة أي قيمة الدفعات عند إمضاء عقد القرض أو الاستثمار وهذا في الزمن 0 أي فترة قبل الدفعة الأولى.

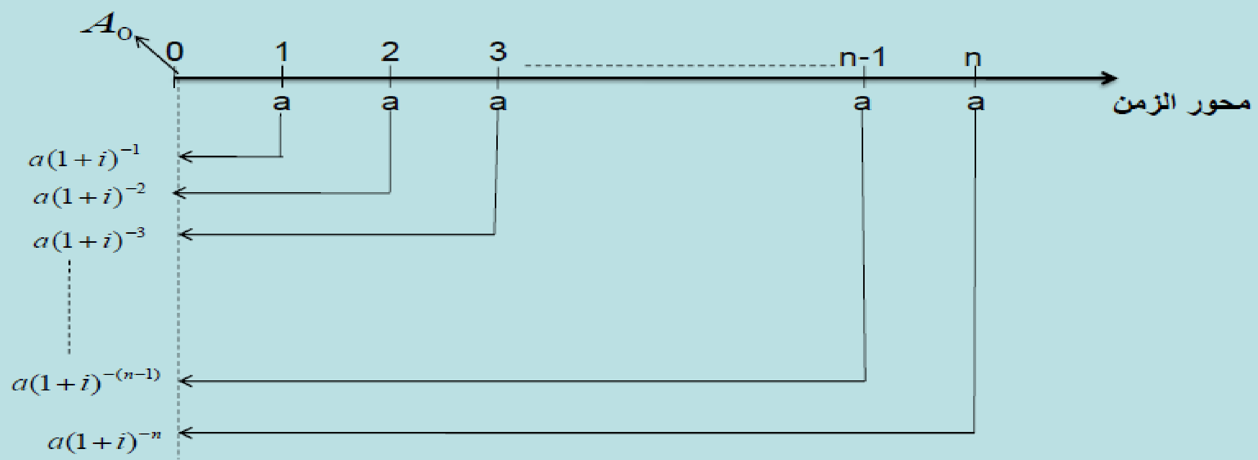
ويُمكن التوصل إلى قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة بطريقتين:

الطريقة الأولى: باستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

لنفترض أن:

A_0 : القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة؛

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وقيمها الحالية كما يلي:



والقيمة الحالية للدفعات كاملة A_0 تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A_0=a(1+i)^{-n}+a(1+i)^{-(n-1)}+\ldots\ldots+a(1+i)^{-3}+a(1+i)^{-2}+a(1+i)^{-1}$$

وبملاحظة عناصر هذه القيمة الحالية نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-n}$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي مجموع القيم الحالية للدفعات يكون كما يلي:

$$A_0=a(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}\Rightarrow A_0=a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

الطريقة الثانية: حساب القيمة الحالية لجملة الدفعات:

$$A_0 = A_n(1+i)^{-n} \Rightarrow A_0 = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} \Rightarrow A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

ولحساب القيمة الحالية للدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 4 الذي يُقدم العلاقة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين: حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي وحالة عدم وجوده.

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:

مثال 3-10

يسدد شخص في نهاية كل سنة ولمدة 9 سنوات مبلغ 5600 دج بمعدل فائدة 5.5%.

المطلوب: احسب القيمة الحالية لهذه الدفعات؟

الحل:

$a = 5600$ دج

$i = 5.5\%$

$n = 9$ سنوات

$$A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow A_0 = 5600\frac{1-(1+0.055)^{-9}}{0.055} = 5600(6.95219525)$$

$$\boxed{A_0 = 389323 \text{ دج}}$$

- حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي: في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام المقدار $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ في حساب القيمة الحالية.

2-2-3 استخدام قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

باستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول مع ضرورة معلومية باقي العناصر

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow a = \frac{A_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \Rightarrow a = A_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

ونستخدم الجدول المالي رقم 5 لاستخراج قيمة المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في السطر الذي تقع فيه المدة أو عدد الدفعات المعلومة ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي يقع فيه حاصل القسمة.

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: إذا بحثا في الجدول المالي رقم 4 عن حاصل القسمة ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{A_0}{a}$ عند السطر التي تقع فيه المدة أو عدد الدفعات المعلومة ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_2 ونرمز للقيمة الصغرى x_2 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_1.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_1 - \frac{(\frac{A_0}{a} - x_2)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المعلوم والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنها هي التي تقع في السطر الذي يقع فيه حاصل القسمة.

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 4 عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{A_0}{a}$ ونحدد عدد الدفعات الذي يقابل كل قيمة من تلك القيمتين ومن ثم نعيد حساب قيمة الدفعة على أساس عدد الدفعات في كلتا الحالتين.

3-دفعات بداية المدة:

3-1-جملة دفعات بداية المدة:

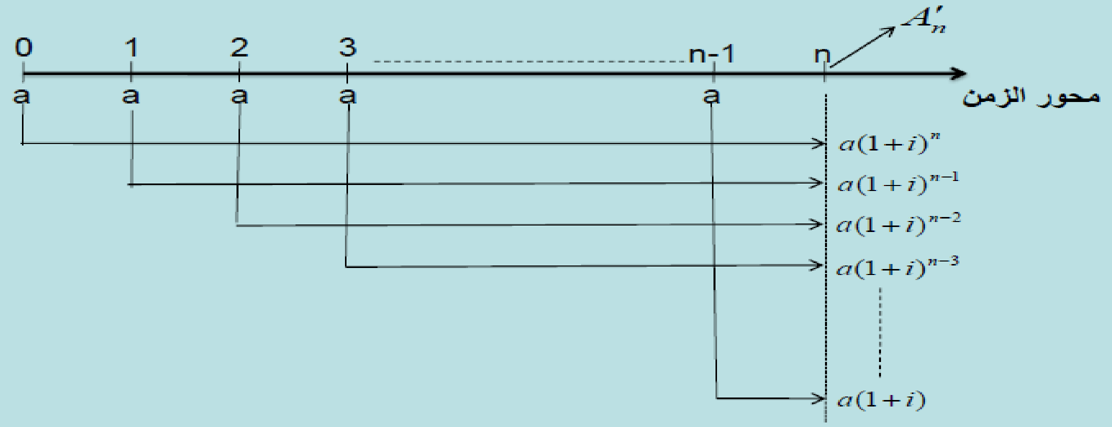
جملة دفعات بداية المدة تُحسب في نهاية مدة السداد للقرض أو تكوين رأس مال أي بعد القسط الأخير بفترة زمنية واحدة.

3-1-1 قانون جملة دفعات بداية المدة:

لنفترض أن:

A'_n : جملة دفعات بدايةالمدة؛

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وجملها كما يلي:



وجملة الدفعات كاملة A'n تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A'_n = a(1+i) + \ldots + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

وبملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a(1+i) وأساسها (1+i) وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي جملة الدفعات يكون كما يلي:

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow \boxed{A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

ولحساب جملة دفعات بداية المدة هنا نستعمل الجدول المالي رقم 3 لاستخراج العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

ويُمكن تكوين علاقة جديدة لحساب جملة دفعات بداية المدة من خلال القانون السابق كما يلي:

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = a\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = a\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}$$

$$\boxed{A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]}$$

وهنا أيضا نقوم باستخدام الجدول المالي رقم 3 لاستخراج العلاقة $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$

ويُمكن مقارنة جملة دفعات بداية المدة وجملة دفعات نهاية المدة كما يلي:

$$A_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad A'_n = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

من خلال كل من القانونين يُمكن ملاحظة أن:

$$\boxed{A'_n = A_n(1+i)}$$

ولحساب جملة الدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 3 الذي يُقدم العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ أو العلاقة $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين:

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول:

مثال 3-17

أراد شخص تكوين رأس مال بـ 7دفعات متساوية مبلغ الواحدة 5000 دج، تدفع الأولى عند إمضاء العقد. معدل الفائدة السنوي 2%.

المطلوب: ماهو مبلغ رأس المال؟

الحل:

$a = 5000$
$i = 2\%$
$n = 7$

استخدام القانون الأول:

$$A_n' = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_7' = 5000(1{,}02)\,\frac{(1+0{,}02)^7 - 1}{0{,}02}$$

$$= 5000(1{,}02)(7{,}4342833 8)$$

$$\boxed{A_7' = 37914{,}85 \text{ دج}}$$

استخدام القانون الثاني:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right] \Rightarrow A'_7 5000\left[\frac{(1{,}02)^{7+1} - 1}{0{,}02} - 1\right] = 5000(8{,}58296905 - 1)$$

$$\boxed{A_7' = 37914{,}85 \text{ دج}}$$

- حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول: في هذه الحالة يتم حساب الجملة باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} = \frac{(1+i_2)^{n+1} - 1}{i_2} + \frac{\left(\frac{(1+i_1)^{n+1} - 1}{i_1} - \frac{(1+i_2)^{n+1} - 1}{i_2}\right) \times (i - i_2)}{(i_1 - i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$ في حساب جملة دفعات بداية المدة.

مثال 3-18

احسب جملة 4 دفعات متساوية قيمة الواحدة 8300دج الأولى تُدفع في بداية السنة الأولى بمعدل فائدة 4,6%.

الحل:

$a = 8300$ دج

$i = 4{,}6\%$

$n = 4$

لدينا معدل فائدة 4,6% وهو معدل غير موجود في الجدول المالي وهو معدل محصور بين المعدلين المجدولين i_1 =4,75% و i_2=4,5% ومنه:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2} + \frac{\left(\frac{(1+i_1)^{n+1}-1}{i_1} - \frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{(1+0{,}046)^{4+1}-1}{0{,}046} = \frac{(1+0{,}045)^{4+1}-1}{0{,}045} + \frac{\left(\frac{(1+0{,}0475)^{4+1}-1}{0{,}0475} - \frac{(1+0{,}045)^{4+1}-1}{0{,}045}\right)\times(0{,}046-0{,}045)}{(0{,}0475-0{,}045)}$$

$$\frac{(1+0{,}046)^{4+1}-1}{0{,}046} = 5{,}47070973 + \frac{(5{,}49810345-5{,}47070973)\times(0{,}001)}{(0{,}0025)} = 5{,}481667218$$

$$A'_4 = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow A'_4 = 8300\left[\frac{(1+0{,}046)^{4+1}-1}{0{,}046}-1\right] = 8300(5{,}481667218-1)$$

$$\boxed{A'_4 = 37197{,}71 \text{ دج}}$$

3-1-2 استخدام قانون جملة دفعات بداية المدة:

باستخدام قانون جملة دفعات بداية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

1- تحديد قيمة الدفعة:

لدينا :

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

ويمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$a = A'_n(1+i)^{-1}\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

وبما أن المقدار $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ لا يوجد في الجداول المالية، فإنه يُمكن التصرف فيه للحصول على علاقة موجودة في الجداول المالية كما يلي:

نستخدم المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ الموجود في الجدول المالي رقم 5

نضرب المقدار السابق في المقدار التالي : $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}$

نطرح المقدار $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ من حاصل الضرب السابق. ومنه:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \times \frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}} - \frac{i}{(1+i)^{n}-1} = \frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1} - \frac{i}{(1+i)^{n}-1}$$

$$= \frac{i(1+i)^{n}-i}{(1+i)^{n}-1} = \frac{i\left[(1+i)^{n}-1\right]}{(1+i)^{n}-1} = i$$

وبالتالي عند البحث عن المقدار $\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$ فإننا نستخرج المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 5 ونطرح منه i. وبالتالي يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$\boxed{a = A'_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right]}$$

مثال 3-19

اوجد قيمة الدفعة إذا علمت أن الجملة التي تكونت بـ 7 دفعات متساوية تساوي 85635,85دج بمعدل فائدة 8% وأن أول دفعة تم دفعها كانت في بداية الفترة؟

الحل:

$A'_7 = 8563585$ دج

$i = 8\%$

$n = 7$ دفعات

$$a = A'_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_7 (1+0{,}08)^{-1}\left[\frac{0.08}{1-(1+0.08)^{-7}} - 0{,}08\right]$$

$$a = 8563585(0{,}92592593)(0{,}1920724 - 0{,}08)$$

$$\boxed{a = 8886{,}5 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون جملة دفعات بداية المدة:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1 = \frac{A'_n}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a} + 1}$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي: نبحث عن قيمة الطرف الثاني في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي تقع فيه قيمة الطرف الثاني.

مثال 3-20

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 15608,04دج عن طريق 3 دفعات متساوية قيمة الواحدة 5000دج، الأولى كانت في بداية السنة.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

$A'_3 = 1560804$ دج

$a = 5000$ دج

$n = 4$ دفعات

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a} + 1 \Rightarrow \frac{(1+i)^{3+1}-1}{i} = \frac{1560804}{5000} + 1 = 4{,}121608$$

نبحث عن المقدار 4,121608 في الجدول المالي رقم 3 عند السطر الذي يقابل 4 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 2% إذا: $\boxed{i = 2\%}$

الحالة الثانية: عدم وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي: إذا بحثنا في الجدول المالي رقم 3 عن قيمة الطرف الثاني ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي تقع بينهما قيمة الطرف الثاني $\frac{A'_n}{a}+1$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 والقيمة الصغرى x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الكبير ب i_1 والمعدل الصغير ب i_2؛

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\times((\frac{A'_n}{a}+1) - x_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال 3-21

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 26587,45دج عن طريق 5 دفعات متساوية قيمة الواحدة 4748ج، الأولى كانت في بداية السنة.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة؟

الحل:

$A'_5 = 26587{,}45$ دج

$a = 4748$ دج

$n = 5$ دفعات

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+i)^{5+1}-1}{i} = \frac{26587{,}45}{4748}+1 = 5{,}59971567+1 = 6{,}59971567$$

نرى أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب

$$i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\times((\frac{A'_n}{a}+1) - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$i = 0{,}0375 + \frac{(0{,}04 - 0{,}0375)\times(6{,}59971567 - 6{,}59142796)}{(6{,}63297546 - 6{,}59142796)}$$

$$i = 0{,}037998688 \approx 0{,}038 = \boxed{3{,}8\%}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون جملة دفعات بداية المدة:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود الطرف الثاني في الجدول المالي</u>: نبحث عن الطرف الثاني في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي تقع فيه قيمة الطرف الثاني.

<u>مثال 3-22</u>

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 28778,94دج بدفعات متساوية مبلغ الواحدة 5302دج، تدفع الأولى عند بداية المدة. معدل الفائدة السنوي 2,75%.

<u>المطلوب</u>: اوجد عدد الدفعات التي سمحت بتكوين رأس المال؟

<u>الحل:</u>

$A'_n = 28778{,}94$ دج

$a = 5302$ دج

$i = 2{,}75\%$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+0.0275)^{n+1}-1}{0.0275} = \frac{28778{,}94}{5302}+1 = 5{,}4279404+1 = 6{,}4279404$$

نبحث عن المقدار 6,4279404 في الجدول المالي رقم 3 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 2,75% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل 6. ومنه:

$$\boxed{n = 6-1 = 5 \text{ دفعات}}$$

<u>الحالة الثانية: عدم وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي</u>: كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 3 عن القيمتين اللتين تحصران قيمة الطرف الثاني$\frac{A'_n}{a}+1$ ونحدد عدد الدفعات التي تقابل تلك القيمتين.

ومن تم نأخذ احد الحلول التالية:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة الجديدة في كل حالة من حالتي عدد السنوات أو الدفعات التين تحصران n المبحوث عنها؛

2- حساب قيمة الدفعة على أساس n التي تقابل القيمة الصغرى التي تحصر قيمة الطرف الثاني $\frac{A'_n}{a}+1$ ثم نحدد الفارق بين الجملة الإجمالية وجملة n دفعة والفرق يتم تسديده عند استلام الجملة.

<u>مثال 3-23</u>

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 62627,14بدفعات متساوية مبلغ الواحدة 8300دج، تدفع الأولى عند بداية المدة. معدل الفائدة السنوي 3%.

<u>المطلوب</u>: اوجد عدد الدفعات التي سمحت بتكوين رأس المال؟

<u>الحل:</u>

$A'_n = 62627{,}14$ دج

$a = 8300$ دج

$i = 3\%$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+0.03)^{n+1}-1}{0.03} = \frac{62627{,}14}{8300}+1 = 8{,}545438554$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 نجد أن هذا المقدار محصور بين 7 و8 أي أن n+1 محصور بين 7 و 8 ومنه فإن n محصور بين 6 و 7 . ويُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة إما مع n=6 أو n=7

حساب قيمة الدفعة مع n=6

$$a = A'_n(1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_6(1+0{,}03)^{-1}\left[\frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-6}} - 0{,}03\right]$$

$$a = 62627{,}14(0{,}97087379)(0{,}1545975) = 9399{,}999332 \approx \boxed{9400\text{دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=7

$$a = A'_n(1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_7(1+0{,}03)^{-1}\left[\frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-7}} - 0{,}03\right]$$

$$a = 62627{,}14(0{,}97087379)(0{,}13050635) = \boxed{7935{,}18\text{دج}}$$

الحل الثاني:

دفع 6 دفعات متساوية قيمة كل منها 8300دج والباقي يُضاف عند استلام الجملة.

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \Rightarrow A'_6 = (8300)\left[\frac{(1+0{,}03)^{6+1}-1}{0{,}03} - 1\right]$$

$$A'_5 = (8300)(7{,}66246218-1) = 55298{,}44\text{دج}$$

وبالتالي فإن الباقي الذي يُضاف عند استلام الجملة هو: $62627{,}14 - 55298{,}44 = 7328{,}7$ دج

3-2القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

3-2-1 قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

القيمة الحالية لدفعات بداية المدة هي قيمة هذه الدفعات كلها في تاريخ أول مدة الإيداع أي عند الفترة 0 من الإيداع، ويتوافق هذا التاريخ مع تاريخ إيداع أول دفعة من سلسلة الدفعات.

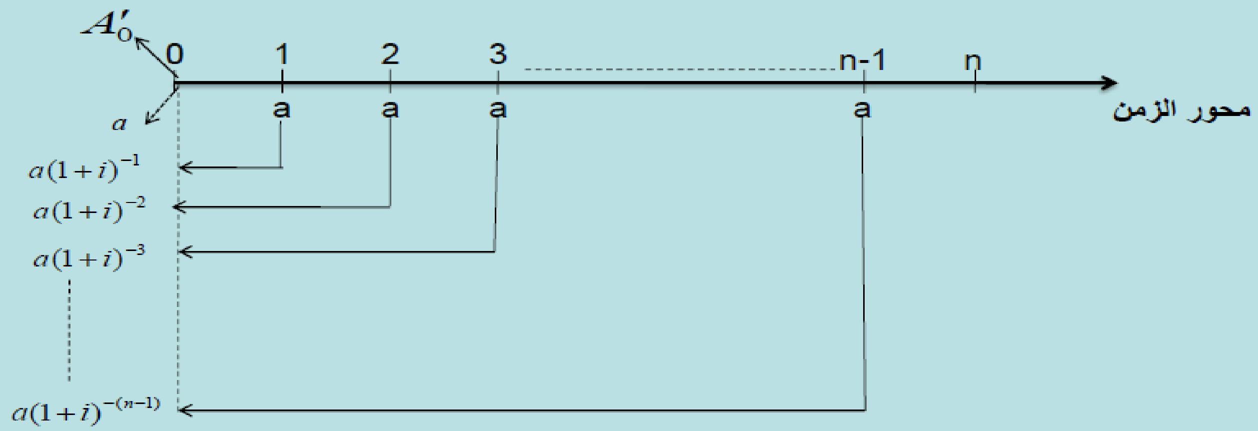
ويُمكن التوصل إلى قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة بطريقتين:

الطريقة الأولى: باستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

لنفترض أن:

A'_0 : القيمة الحالية لدفعات بداية المدة؛

ونستعين بالشكل التالي الذي يُوضح محور الزمن للفترات وللدفعات وقيمها الحالية كما يلي:



والقيمة الحالية للدفعات كاملة A'_0 تكون ابتداء من أول دفعة كما يلي:

$$A_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + ... + a(1+i)^{-(n-1)}$$

وبملاحظة الطرف الأيسر من المعادلة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها $(1+i)^{-1}$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي مجموع القيم الحالية للدفعات يكون كما يلي:

$$A'_0 = a\frac{\left((1+i)^{-1}\right)^n - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \boxed{A'_0 = a\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]}$$

<u>الطريقة الثانية:</u> حساب القيمة الحالية لجملة الدفعات:

$$A'_0 = A'_n(1+i)^{-n} \Rightarrow A'_0 = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right](1+i)^{-n} \Rightarrow \boxed{A'_0 = a\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]}$$

ولحساب القيمة الحالية للدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 4 الذي يُقدم العلاقة $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ بشرط وجود معدل الفائدة في الجدول المالي، وهنا نكون أمام حالتين:

<u>- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:</u>

<u>مثال 3-24</u>

احسب القيمة الحالية لـ 8 دفعات متساوية قيمة الواحدة تساوي 4429 دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 4%.

<u>الحل:</u>

$a = 4429$ دج

$i = 4\%$

$n = 8$ دفعات

$$A'_0 = a\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow A'_0 = 4429\left[1 + \frac{1-(1+0.04)^{-(8-1)}}{0.04}\right] = 4429(7,00205467)$$

$\boxed{A'_0 = 31012{,}1 \text{ دج}}$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:** في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل الغير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل الغير المجدول وليكن المعدل الأكبر i_1 والمعدل الأصغر i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}=\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2}-\frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2}-\frac{1-(1+i_1)^{-(n-1)}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ في حساب القيمة الحالية.

مثال 3-25

احسب القيمة الحالية لـ 5 دفعات متساوية قيمة الواحدة تساوي 8149دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 2,9%.

الحل:

$a=8149$ دج

$i=2,9\%$

$n=5$ دفعات

نلاحظ أن معدل الفائدة 2,9%غير موجود في الجدول المالي وهو محصور بين $i_1=3\%$ و $i_2=2,75\%$ وبطريقة التناسب:

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}=\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2}-\frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2}-\frac{1-(1+i_1)^{-(n-1)}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0,029}=\frac{1-(1+0.0275)^{-(5-1)}}{0.0275}-\frac{\left(\frac{1-(1+0.0275)^{-(5-1)}}{0.0275}-\frac{1-(1+0.03)^{-(5-1)}}{0.03}\right)\times(0.029-0.0275)}{(0.03-0.0275)}$$

$$\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0,029}=3,73942787-\frac{(3,73942787-3,7170984)\times(0.0015)}{(0.0025)}=3,726030188$$

$$A_0'=a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]\Rightarrow A_0'=8149\left[1+\frac{1-(1+0,029)^{-(5-1)}}{0,029}\right]=8149(1+3,726030188)$$

$\boxed{A_0'=38512,42 \text{ دج}}$

3-2-2 استخدام قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

باستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \boxed{a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}}}$$

ويُمكن أن نجد قيمة $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ في الجدول المالي رقم 4.

مثال 3-26

تبلغ القيمة الحالية لسلسلة دفعات متساوية عددها 8 دفعات 57179,59 دج بمعدل فائدة 3,5%.

المطلوب: احسب قيمة الدفعة؟

الحل:

$$A'_0 = 57179{,}59 \text{ دج}$$

$$i = 3{,}5\%$$

$$n = 8 \text{ دفعات}$$

$$a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} = \frac{57179{,}59}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(8-1)}}{i}} = \frac{57179{,}59}{1+6{,}11454398} \Rightarrow \boxed{a = 8037 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الأيسر من المعادلة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود القيمة في الجدول المالي: نبحث عن القيمة في السطر الذي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي تقع فيه القيمة.

مثال 3-27

سلسلة دفعات ثابتة عددها 7 وقيمة كل واحدة منها 6339 دج الأولى تُدفع في بداية الفترة كانت قيمتها الحالية 39841,069دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$$A'_0 = 39841{,}069 \text{ دج}$$

$$a = 6339 \text{ دج}$$

$$n = 7$$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(7-1)}}{i} = \frac{39841{,}069}{6339} - 1 = 5{,}28507162$$

نبحث عن المقدار 5,28507162 في الجدول المالي رقم 4 عند السطر الذي يقابل 6 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 3,75% إذا:

$$\boxed{i = 3{,}75\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود القيمة في الجدول المالي: إذا بحثا في الجدول المالي رقم 4 عن القيمة ولم نجدها فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما القيمة $\frac{A'_0}{a}-1$ عند السطر التي تقع فيه المدة المحددة في المعطيات ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_2 ونرمز للقيمة الصغرى x_2 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_1.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_1 - \frac{((\frac{A'_0}{a}-1)-x_2)(i_1-i_2)}{(x_1-x_2)}}$$

مثال 3-28

سلسلة دفعات ثابتة عددها 9 وقيمة كل واحدة منها 5200دج الأولى تُدفع في بداية الفترة كانت قيمتها الحالية 39220,59دج

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$A'_0 = 39220{,}59$ دج

$a = 5200$ دج

$n = 9$ دفعات

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a}-1 \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(9-1)}}{i} = \frac{39220{,}59}{5200}-1 = 6{,}542421154$$

نرى أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب

$$i = i_1 - \frac{((\frac{A'_0}{a}-1)-x_2)(i_1-i_2)}{(x_1-x_2)} \Rightarrow i = 0{,}0475 - \frac{(6{,}542421154-6{,}52903633)(0{,}0475-0{,}045)}{(6{,}59588607-6{,}52903633)}$$

$$i = 0{,}046999443 \approx 0{,}047 = \boxed{4{,}7\%}$$

3- تحديد مدة أو عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a}-1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الأيسر في المعادلة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود القيمة في الجدول المالي: نبحث عن القيمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المحدد في المعطيات والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي تقع فيه القيمة.

مثال 3-29

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 7263دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 5% كانت قيمتها الحالية 49289,43دج.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A'_0 = 49289{,}43$ دج

$a = 7263$ دج

$i = 5\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a}-1 \Rightarrow \frac{1-(1+0.05)^{-(n-1)}}{0.05} = \frac{49289{,}43}{7263}-1 = 5{,}786373399$$

نبحث عن المقدار 5,786373399 في الجدول المالي رقم 4 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 5% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل مدة 7 فترات. ومنه:

$$\boxed{n = 7+1 = 8 \text{ دفعات}}$$

الحالة الثانية: عدم وجود القيمة في الجدول المالي: كما في البحث عن i فقد لا يوجد n أيضا في الجدول أو لا يكون عددا كاملا، هنا لا يُمكن أن توجد n بهذه الوضعية مادام n هي عدد الفترات، وبالتالي عند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 4 عن القيمتين اللتين تحصران القيمة $\frac{A'_0}{a}-1$ ونحدد عدد السنوات أو الدفعات التي تقابل تلك القيمتين. ومن بين الحلول التي يُمكن الأخذ بها هي:

- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة n الصغرى التي تحصر n المبحوث عنها؛

- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة n الكبرى التي تحصر n المبحوث عنها؛

مثال 3-30

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 6340دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 3,5% كانت قيمتها الحالية 45639,8دج.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A'_0 = 45639{,}8$ دج

$a = 6340$ دج

$i = 3{,}5\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+0{,}035)^{-(n-1)}}{0{,}035} = \frac{45639{,}8}{6340} - 1 = 6{,}198706625$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 4 نجد أن هذا المقدار محصور بين n=7 و n=8 أي أن n-1 محصور بين 7 و 8 ومنه فإن n محصور بين 8 و 9. ومن بين الحلول الممكنة، يُمكن الأخذ بأحد الحلين التاليين:

حساب قيمة الدفعة مع n=8

$$a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} = \frac{45639{,}8}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(8-1)}}{0{,}035}} = \frac{45639{,}8}{1+6{,}11454398}$$

$$\boxed{a = 6415 \text{ دج}}$$

حساب قيمة الدفعة مع n=9

$$a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} = \frac{45639{,}8}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(9-1)}}{0{,}035}} = \frac{45639{,}8}{1+6{,}87395554}$$

$$\boxed{a = 5796{,}3 \text{ دج}}$$