

Exercice 1 : Les machines à vecteurs de support SVM (08 points)

Soit l'ensemble de données $X = \{(\mathbf{x}^{(t)}, \mathbf{y}^{(t)}), t = 1, \dots, 6\}$ présenté ci-bas.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(1)} = -1, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(2)} = -1, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(3)} = -1,$$

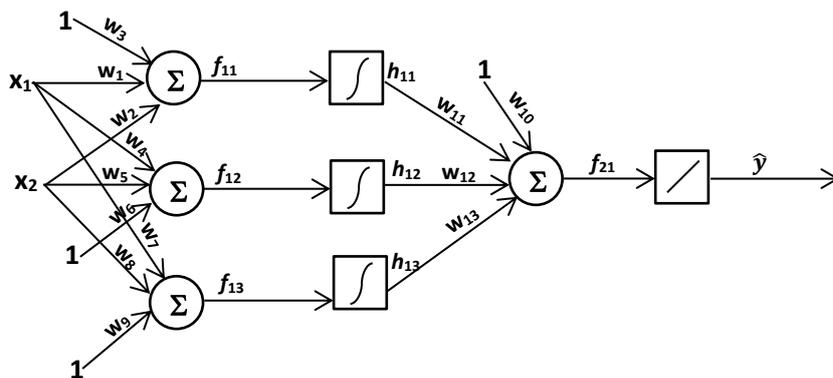
$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(4)} = 1, \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(5)} = 1, \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{y}^{(6)} = 1$$

- 1) Tracer ces points en deux dimensions.
- 2) Supposons que l'on veut classer ces données avec un classifieur de type SVM utilisant un noyau linéaire ($K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$). Tracez les données de l'ensemble X , les marges géométriques maximales obtenues avec le SVM, l'hyperplan séparateur correspondant, et encerclez les données agissant comme vecteurs de support.
- 3) Donnez les valeurs des poids \mathbf{w} et biais w_0 correspondant au discriminant linéaire maximisant les marges géométriques tracées en question 2).

* **Indice** : il n'est pas nécessaire de calculer les α_i pour répondre à la question.

Exercice 2 : Réseaux de neurones (8 points)

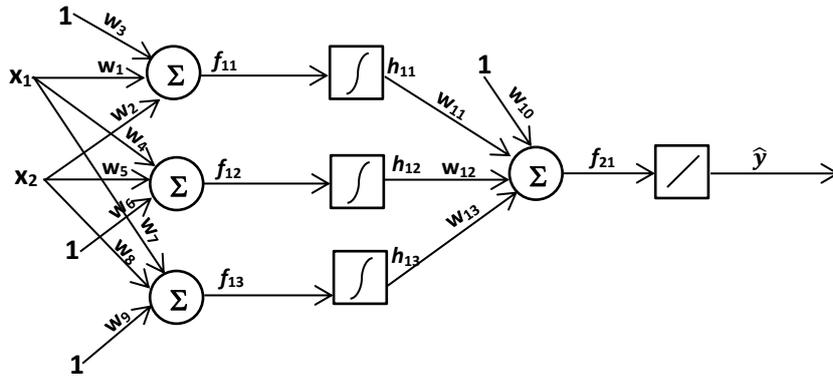
Soit le réseau de neurones multicouches décrit par le graphe suivant :



- 1) Donner les formules mathématiques qui déterminent les sorties intermédiaires f_{11} , f_{12} , f_{13} , h_{11} , h_{12} , h_{13} , f_{21} ainsi que la sortie finale \hat{y} .
- 2) Soit la fonction d'erreur : $E(\mathbf{w}) = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^2$
 En appliquant l'algorithme de propagation en arrière (backpropagation), trouver les expressions des mises à jour des paramètres Δw_j pour $j = 1, \dots, 13$.

Exercice 3 : Application numérique sur les réseaux de neurones (4 points)

Soit le même réseau de neurones multicouches de l'exercice 2 décrit par le graphe suivant :



Application Numérique : Soit la donnée $\mathbf{x} = (2, -1)$, $\mathbf{y} = 1$ et soient les valeurs initiales des paramètres w définies comme suit :

$$\mathbf{w}_1 = 1, \mathbf{w}_2 = 0.5, \mathbf{w}_3 = -0.25, \mathbf{w}_4 = 0.75, \mathbf{w}_5 = 1, \mathbf{w}_6 = 0.25, \mathbf{w}_7 = 0.5, \mathbf{w}_8 = 0.5, \mathbf{w}_9 = -0.5,$$
$$\mathbf{w}_{10} = 1, \mathbf{w}_{11} = -1, \mathbf{w}_{12} = 0.5, \mathbf{w}_{13} = 0.25.$$

- 1) Calculer les sorties intermédiaires $f_{11}, f_{12}, f_{13}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, f_{21}$ ainsi que la sortie finale \hat{y} .
- 2) Calculer les mise à jour Δw_j ainsi que les paramètres w_j pour $j = 1, \dots, 13$ après une itération de mise à jour (en considérant le paramètre d'apprentissage $\alpha = 0.1$).

NB : La précision des calculs numériques est fixée à 4 chiffres après la virgule.

Bon courage