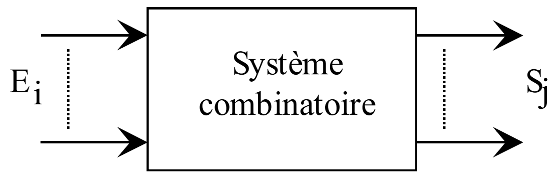
Chapitre 1 : LOGIQUE COMBINATOIRE

INTRODUCTION

Un système combinatoire est un système qui, à tout instant, peut s'exprimer conformément au schéma ci-dessous et aux relations suivantes :



$$\forall t \quad S_j = f(E_i) \quad 1 \le i \le n \quad \text{et} \quad 1 \le j \le p$$

Les fonctions de sortie S_j ne dépendent que des entrées E_i à l'instant considéré. E_i et S_j sont respectivement des **variables** et des **fonctions binaires** de ces variables, fonctions et variables ne pouvant prendre que les **deux valeurs 0 et 1** par convention.

Afin de représenter et de traiter de tels systèmes, il est nécessaire de s'appuyer sur un outil mathématique rigoureux : l'algèbre binaire (l'appellation algèbre de Boole est aussi largement utilisée dans la littérature : nous parlons alors de variables et de fonctions booléennes). Cette algèbre va permettre de formaliser les propriétés relatives aux systèmes logiques.

I.1) ALGÈBRE DE BOOLE

I.1.1) Définitions d'une variable logique et d'une fonction logique

Une variable logique est une grandeur qui ne prend qu'un nombre fini "p" d'états discrets.

Si ce nombre d'états finis est égal à 2 "p=2" nous nous trouvons dans le cadre de l'algèbre de Boole. Ces deux états discrets sont notés : "0" et "1".

Les deux états logiques "1" et "0" peuvent correspondre respectivement à une variable vraie ou fausse, à un courant qui passe ou ne passe pas, à une tension présente (5 volts) ou absente (0 volt).

Nous appelons fonction logique F de n variables logiques l'application binaire définie par :

$$F:(0,1)^n \to (0,1)$$

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto F(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{cases} 0 \text{ si F est fausse} \\ 1 \text{ si F est vraie} \end{cases}$$

<u>Un point vrai</u> d'une fonction logique F est un point pour lequel F est vraie (F=1).

<u>Un point faux</u> d'une fonction logique F est un point pour lequel F est fausse (F=0).

<u>La table de vérité</u> d'une fonction logique F est un tableau représentant les différentes valeurs de la fonction logique en fonction des valeurs des variables logiques dont F dépend. La table de vérité d'une fonction logique suffit à elle seule pour définir complètement cette fonction logique.

<u>Exemple</u> : Soit la fonction logique F définie de la façon suivante :

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$F:(0,1)^3 \to (0,1)$$
$$(a,b,c) \mapsto F(a,b,c)$$

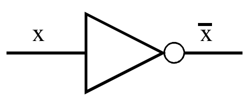
Les triplets suivants sont les points vrais de la fonction logique F : (0,0,0) (0,1,1) (1,0,0) (1,0,1)
Les triplets suivants sont les points faux de la fonction logique F : (0,0,1) (0,1,0) (1,1,0) (1,1,1)

I.1.2) Opérateurs logiques sur une variable

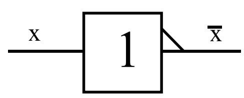
x	0	1	Fonction	Nom
f_0	0	0	$f_0(x) = 0$	Fonction nulle
f_1	0	1	$f_1(x) = x$	Fonction identité
f_2	1	0	$f_2(x) = \overline{x}$	Fonction inverse
f_3	1	1	$f_3(x) = 1$	Fonction unité

<u>Opérateur NON</u> : (NOT ou Complémentarité ou Inversion) f(x) = $\overline{x}$.

Nous remarquons que $\overline{\overline{x}}$ = x l'opération d'inversion est une involution. Le symbole de l'inverseur est :



NORME U.S.A.



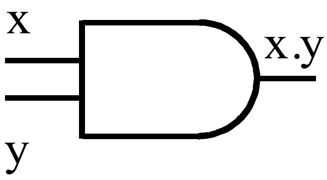
NORME C.E.I.

I.1.3) Opérateurs logiques sur deux variables

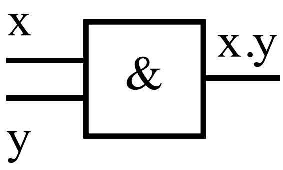
Soient x et y deux variables logiques booléennes.

<u>Opérateur ET</u> : (AND) f(x,y) = x.y. La table de vérité et les symboles de l'opérateur ET sont :

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



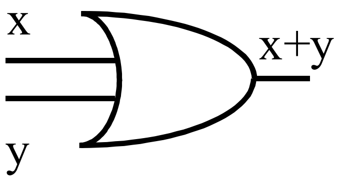
NORME U.S.A.



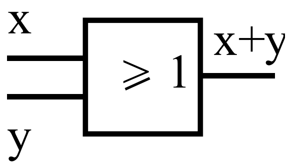
NORME C.E.I.

<u>Opérateur OU</u> : (OR) f(x,y) = x+y. La table de vérité et les symboles de l'opérateur OU sont :

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



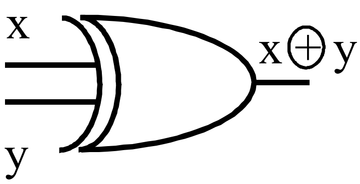
NORME U.S.A.



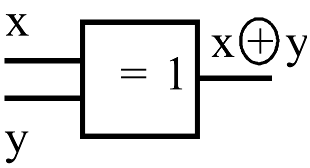
NORME C.E.I.

<u>Opérateur OU Exclusif</u> : (XOR) f(x,y) = $x \oplus y = x.\overline{y} + \overline{x}.y$. La table de vérité et les symboles de l'opérateur OU Exclusif sont :

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



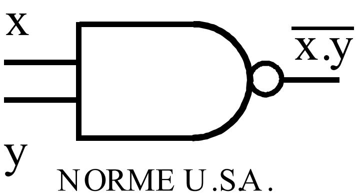
NORME U.S.A.



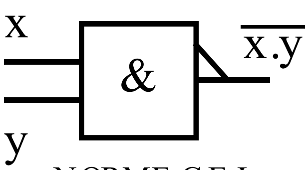
NORME C.E.I.

<u>Opérateur NON ET</u> : (NAND ou ON) f(x,y) = $\overline{x.y}$. La table de vérité et les symboles de l'opérateur NON ET sont :

x	y	$\overline{x.y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



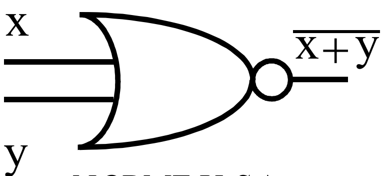
NORME U.S.A.



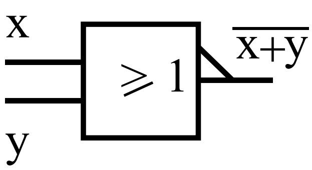
NORME C.E.I.

<u>Opérateur NON OU</u> : (NOR ou NI) f(x,y) = $\overline{x+y}$. La table de vérité et les symboles de l'opérateur NON OU sont :

x	y	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



NORME U.S.A.



NORME C.E.I.

Table des fonctions logiques à deux variables :

(x,y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	Équivalant
f0(x,y)	0	0	0	0	0
f1(x,y)	0	0	0	1	$x.y$
f2(x,y)	0	0	1	0	$x.\overline{y}$
f3(x,y)	0	0	1	1	x
f4(x,y)	0	1	0	0	$\overline{x}.y$
f5(x,y)	0	1	0	1	y
f6(x,y)	0	1	1	0	$x \oplus y$
f7(x,y)	0	1	1	1	$x+y$
f8(x,y)	1	0	0	0	$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$
f9(x,y)	1	0	0	1	$x \otimes y = \overline{x \oplus y}$
f10(x,y)	1	0	1	0	$\overline{y}$
f11(x,y)	1	0	1	1	$x + \overline{y}$
f12(x,y)	1	1	0	0	$\overline{x}$
f13(x,y)	1	1	0	1	$\overline{x} + y$
f14(x,y)	1	1	1	0	$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$
f15(x,y)	1	1	1	1	1

I.1.4) Simplifications

Voici quelques simplifications possibles avec les fonctions logiques +, . :

$x + 0 = x$	$x . 0 = 0$	$\overline{x.0} = 1$	$\overline{x+0} = \overline{x}$
$x + 1 = 1$	$x . 1 = x$	$\overline{x.1} = \overline{x}$	$\overline{x+1} = 0$
$x + x = x$	$x . x = x$	$\overline{x.x} = \overline{x}$	$\overline{x+x} = \overline{x}$
$x + \overline{x} = 1$	$x . \overline{x} = 0$	$\overline{x.\overline{x}} = 1$	$\overline{x+\overline{x}} = 0$

I.1.5) Généralisation

Voici les conditions nécessaires et suffisantes pour que :

OU : $x + y + z + \ldots = 1 \Leftrightarrow$ **x=1 ou y=1 ou z=1 ou ...**

ET : $x . y . z . \ldots = 1 \Leftrightarrow$ **x=1 et y=1 et z=1 et ...**

XOR : $x \oplus y \oplus z \oplus \ldots = 1 \Leftrightarrow$ **Le nombre de variables à 1 est impair**

I.1.6) Propriétés

- **Commutativité :** ET, OU, NON ET, NON OU, OU Exclusif.
- **Associativité :** OU, ET, OU Exclusif.
- **Distributivité** : ET distributif sur OU,
  OU distributif sur ET,
  ET distributif sur OU Exclusif.

I.1.7) Théorèmes de DE MORGAN

Théorème N°1 : Le complément d'un produit de variables est égal à la somme des compléments des variables. $\overline{x.y.z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

Théorème N°2 : Le complément d'une somme de variables est égal au produit des compléments des variables. $\overline{x + y + z} = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$

Propriété : Pour inverser une fonction logique, nous complémentons chaque variable de l'expression puis nous permutons les opérateurs ET et OU ainsi que les opérateurs NI et ON (NOR et NAND).

I.2) LES FORMES TECHNOLOGIQUES

I.2.1) Terminologie

- ♦ **Littéral :** c'est une seule variable complémentée ou non: x, y, $\overline{x}$.
- ♦ **Monôme :** c'est un produit de littéraux: x.y, $\overline{x}$, x.$\overline{y}$.z.k .
- ♦ **Monal :** c'est une somme de littéraux: x+y, $\overline{x}$, x+$\overline{y}$+z+k .

I.2.2) Premières formes technologiques

♦**La première forme technologique** est une somme de monômes. Exemple:
$\varphi = \mathbf{a + b.\overline{c} + d.c.\overline{a}}$.

♦**La première forme technologique associée** est obtenue à partir de la première forme technologique en remplaçant tous les opérateurs ET et OU par des opérateurs NON ET et en complémentant les monômes constitués d'un seul littéral. Exemple :
$\varphi = \mathbf{\overline{\overline{a}.(\overline{b.\overline{c}}).(\overline{d.c.\overline{a}})}}$.

I.2.3) Deuxièmes formes technologiques

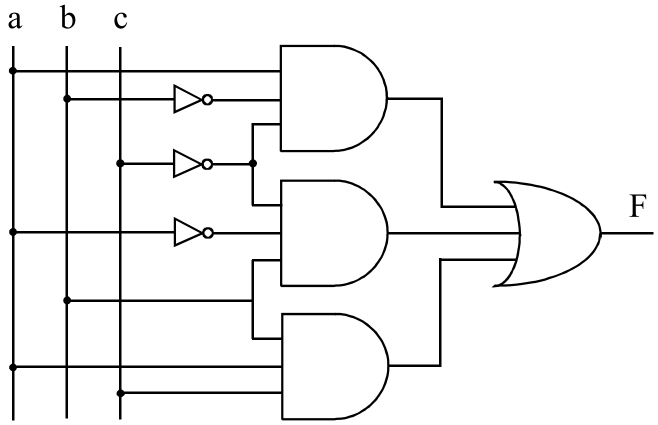
♦ **La deuxième forme technologique** est un produit de monaux. Exemple:
$\varphi = \mathbf{a.(b + \overline{c}).(c + \overline{a} + d)}$.

♦ **La deuxième forme technologique associée** est obtenue à partir de la deuxième forme technologique en remplaçant tous les opérateurs ET et OU par des opérateurs NON OU et en complémentant les monaux constitués d'un seul littéral. Exemple :
$\varphi = \mathbf{\overline{\overline{a} + (\overline{b + \overline{c}}) + (\overline{c + \overline{a} + d})}}$.

I.3) LES LOGIGRAMMES

Définition : Le logigramme est la matérialisation électrique d'une fonction logique. Chaque variable logique correspond à un signal électrique (0 ou 5 volts) matérialisant le niveau haut ou bas de la variable (0 ou 1). Nous représentons la fonction logique en utilisant la schématisation sous forme de portes (norme USA ou CEI mais non mélangé).

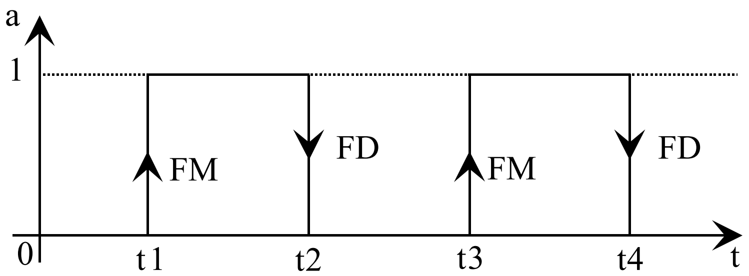
Exemple : Soit la fonction logique $F = a.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.\overline{c} + a.b.c$ Le logigramme obtenu est :



I.4) LES CHRONOGRAMMES

Définition : Un chronogramme est une représentation des différentes valeurs (de l'évolution) d'une variable logique ou d'une fonction logique au cours du temps.

Exemple : Chronogramme de la variable logique "a"



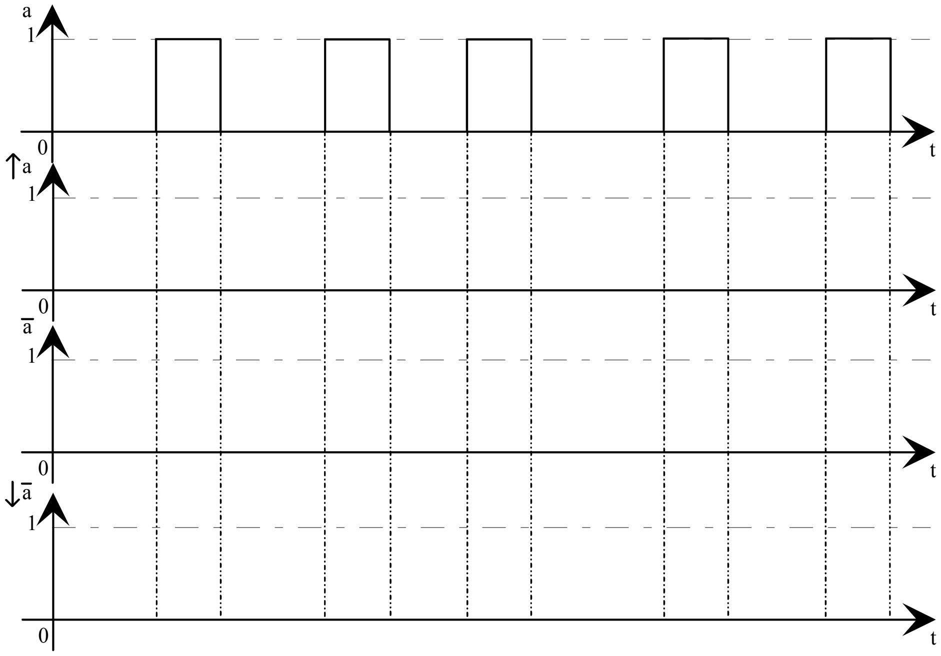
Définition : ♦ **Le front montant de "a" (FM), noté "$\uparrow$a", est l'instant où "a" passe de 0 à 1.**
♦ **Le front descendant de "a" (FD), noté "$\downarrow$a", est l'instant où "a" passe de 1 à 0.**

Remarque : les fronts n'ont pas de durée mais correspondent à des instants précis.

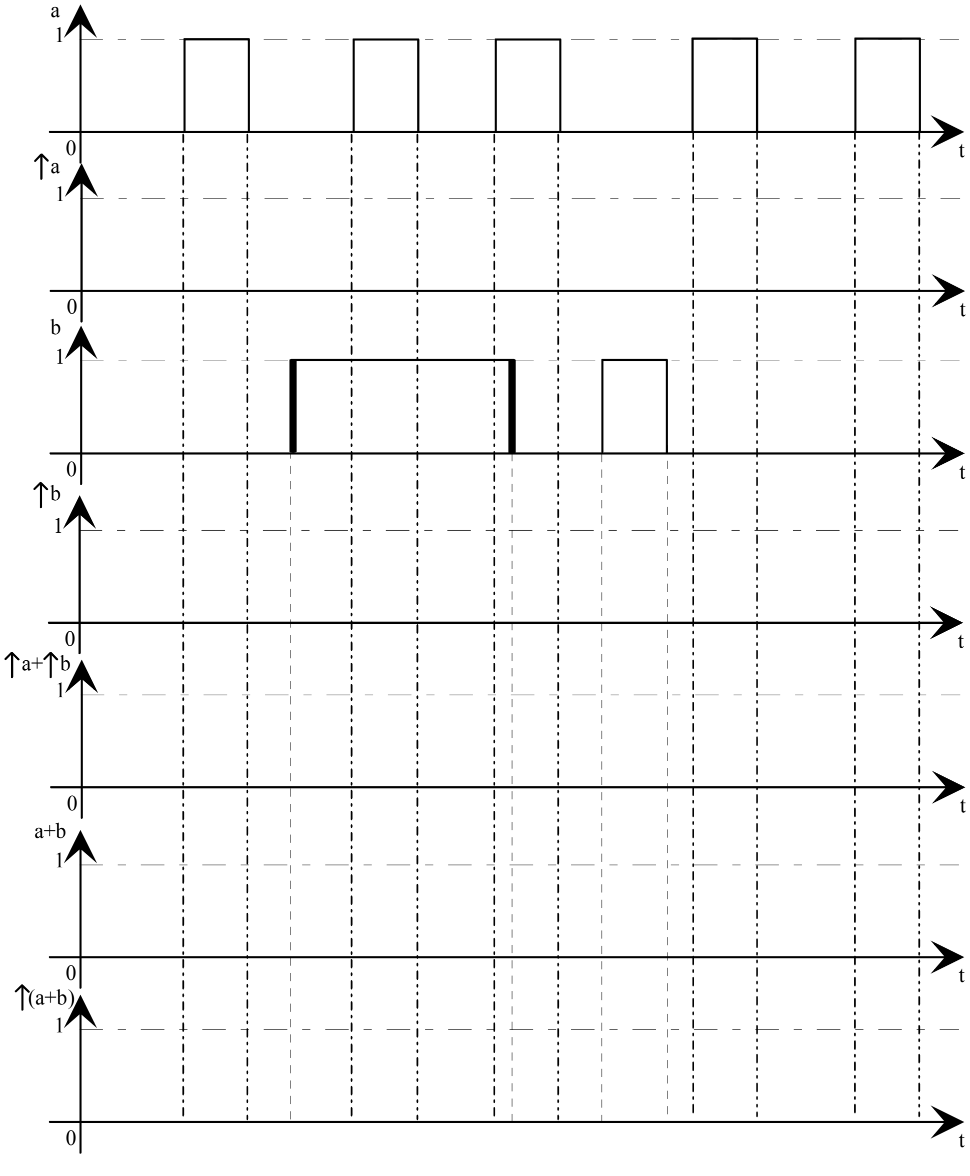
Propriétés :	$\uparrow a = \downarrow \overline{a}$	$\uparrow a + \uparrow b \neq \uparrow (a+b)$
	$(\uparrow a).x + (\uparrow a).y = \uparrow a.(x+y)$	$\uparrow a \,.\, \uparrow b \neq \uparrow (a \,.\, b)$
	$(\uparrow a).x + (\uparrow b).x = x.(\uparrow a + \uparrow b)$	$\uparrow \overline{a} \neq \overline{\uparrow a}$

Remarque : Ces propriétés restent valables avec les fronts descendants.

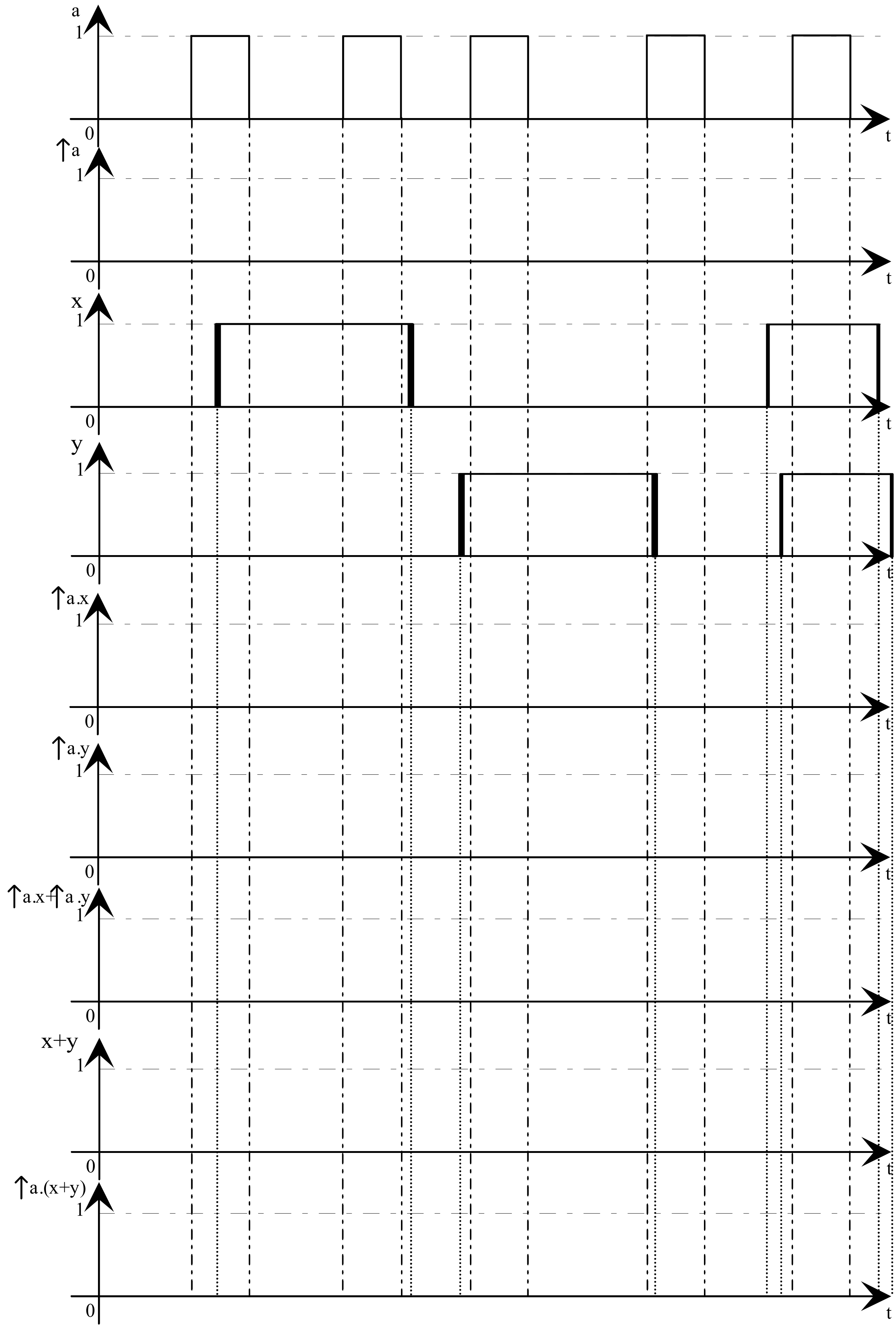
<u>Démonstration</u> : $\uparrow a = \downarrow \overline{a}$



$\uparrow a + \uparrow b \neq \uparrow (a+b)$:



(↑a).x + (↑a).y = ↑a.(x+y)



I.5) SIMPLIFICATION DES FONCTIONS LOGIQUES (Karnaugh)

I.5.1) Définitions

<u>La première forme canonique</u> d'une fonction logique F est la somme de tous les monômes associés aux points vrais de F.

<u>La deuxième forme canonique</u> d'une fonction logique F est le produit de tous les monaux associés aux points faux de F, en complémentant chaque littéral des monaux.

<u>Remarque</u> : La première forme canonique d'une fonction logique F est une première forme technologique de F mais pas l'unique. De la même manière, la deuxième forme canonique d'une fonction logique F est une deuxième forme technologique de F mais pas l'unique.

<u>La table de Karnaugh</u> est un tableau représentant les différents résultats d'une fonction logique F en fonction des valeurs que peuvent prendre les variables logiques dont F dépend. Le code binaire utilisé est cette fois-ci le code binaire réfléchi au lieu du code binaire naturel utilisé dans le cas de la table de vérité.

<u>Remarque</u> : Le code binaire réfléchi est un code binaire complet et adjacent ; complet car tous les nombres sont représentables et adjacents car nous passons d'une configuration de bits à la suivante en ne modifiant que la valeur d'un seul bit.

<u>Exemple</u> : Soit la fonction logique $F = a \oplus b \oplus c$. Les tables de vérité et de Karnaugh de F sont :

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tableau de Karnaugh

c \ a b	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

- Les points vrais de F sont : $\bar{a}.\bar{b}.c$, $\bar{a}.b.\bar{c}$, $a.\bar{b}.\bar{c}$, $a.b.c$
- Les points faux de F sont : $a+b+c$, $a+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+b+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{b}+c$
- La première forme canonique est : $\mathbf{F = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.c}$
- La deuxième forme canonique est : $\mathbf{F = (a+b+c).(a+\bar{b}+\bar{c}).(\bar{a}+b+\bar{c}).(\bar{a}+\bar{b}+c)}$

I.5.2) Simplification des fonctions logiques

La table de Karnaugh d'une fonction logique fait apparaître un certain nombre de symétries axiales par rapport aux variables dont dépend la fonction logique. Dans l'exemple suivant, nous utiliserons une fonction logique dépendante de 5 variables logiques a, b, c, d et e.

ab \ cde	**000**	**001**	**011**	**010**	**110**	**111**	**101**	**100**	
00									
01						**1**	**1**		**↑b**
11						**1**	**1**		**↑a**
10									**↑b**
		←e	**←d**	**←e**	**←c**	**←e**	**←d**	**←e**	

Le tableau suivant récapitule le nombre de symétries par rapport aux différentes variables et donne leur force respective :

Nombre de symétries	Variable	Force de la symétrie
1	a	1/2
1	c	1/2
2	b	1/4
2	d	1/4
4	e	1/8

Règle de Karnaugh : nous pouvons regrouper les monômes élémentaires par axe de symétrie de force croissante. Les variables correspondantes aux axes de symétrie n'interviennent pas dans l'expression du nouveau monôme ainsi formé.

Exemple : Dans la table de Karnaugh précédente le monôme entouré a pour expression b.c.e en supprimant d et a par symétrie.

Méthode de Karnaugh : pour simplifier une fonction logique nous couvrons les points vrais de sa table de Karnaugh par des monômes premiers en regroupant systématiquement par axe de symétrie pris dans leur force croissante. La fonction logique est égale à la somme des monômes ainsi obtenus.

Remarque : un monôme est premier s'il n'admet pour une fonction donnée pas d'autre diviseur que 1 et lui-même.

Autre énoncé de la méthode de Karnaugh : cette méthode consiste à exprimer les monômes obtenus en regroupant les points vrais adjacents de la table de Karnaugh de la fonction logique par ensemble correspondant à des puissances de 2 (2,4,8,16...) les plus grands possibles. La fonction logique est égale à la somme des monômes ainsi obtenus.

Définition : un monôme est irredondant s'il couvre à lui seul un point vrai de la fonction logique.

Définition : Nous appelons base première complète d'une fonction logique l'ensemble constitué de tous les monômes premiers de cette fonction.

Remarque : l'expression simplifiée de la fonction logique obtenue par la méthode de Karnaugh est une première forme technologique, elle n'est pas unique mais c'est la plus simple que nous puissions obtenir.

Remarque : la simplification d'une fonction logique par la méthode de Karnaugh consiste en fait à faire la somme des monômes irredondants de la base première complète de la fonction logique.

<u>Exemple</u> : soit la fonction logique donnée par la table de Karnaugh suivante :

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	1

Par la règle de Karnaugh nous obtenons 4 monômes premiers qui sont $\theta_1 = \mathbf{\bar{a}.\bar{c}.\bar{d}}$, $\theta_2 = \mathbf{b.d}$, $\theta_3 = \mathbf{\bar{a}.b.\bar{c}}$ et $\theta_4 = \mathbf{a.\bar{b}.c.\bar{d}}$. La base première complète est $\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$. Les monômes irredondants sont $\theta_1,\theta_2,\theta_4$. Ainsi la première forme technologique la plus simple de F est : $F = \theta_1+\theta_2+\theta_4$.

<u>Définition</u> : nous appelons fonction logique incomplètement définie une fonction pour laquelle certaines valeurs ne sont pas définies. Nous notons cette valeur *, X ou Φ (indifférente) et 0 ≤ * ≤ 1. Pour simplifier ce type de fonctions nous considérons les * à 1 ou à 0 quand nous en avons besoin.

<u>Exemple</u> : soit la fonction logique donnée par la table de Karnaugh suivante :

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	*	0
11	0	*	1	0
10	*	*	0	1

Les valeurs non-définies de la fonction logique sont considérées comme des "1" dans les parties grisées et comme des "0" dans la partie blanche afin d'obtenir la forme la plus simple de la fonction logique.