Chapitre 1

Géométrie Euclidienne

La géométrie euclidienne est l'étude des espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire. Ce produit scalaire permet de définir les notions de longueur, distance et angle dans l'espace vectoriel. Ce chapitre presente les définitions de base et les principales propriétés de toutes ces notions. Chaque section du chapitre aura un certain nombre d'exercices dont la correction se fera dans un autre pdf accompagnant le cours.

1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel réel (le corps des scalaires est $\mathbb{R}$).

Définition 1.1. *Un produit scalaire sur E est une application*

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

possédant les propriétés suivantes :

1. $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$; $\phi(u, v_1 + v_2) = \phi(u, v_1) + \phi(u, v_2)$ *et* $\phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v) = \lambda\phi(u, v)$ *pour tous* $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\phi(u, u) \geq 0$ *pour tout* $u \in E$.
3. $\phi(u, u) = 0$ *si et seulement si* $u = 0$
4. $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

La première propriété exprime la bilinéarité de ϕ, la seconde exprime sa positivité et un synonyme de la troisième est de dire que ϕ est définie. La dernière exprime la symétrie du produit scalaire. Les applications portant sur des vecteurs et ayant des valeurs dans $\mathbb{R}$ (et plus généralement dans le corps des scalaires) ont un nom : ce sont des formes. Ainsi un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Pour des raisons historiques le produit scalaire est souvent noté

$$\phi(u, v) = \langle u, v\rangle$$

notation que nous adopterons dans toute la suite. Remarquer que ϕ associe à deux vecteurs u et v un nombre réel ou encore un scalaire $\langle u, v\rangle$, d'où le nom de produit scalaire.

Exercice 1.2. *Montrer que $\langle 0, u\rangle = 0$ pour tout $u \in E$ (le premier 0 est le vecteur nul dans E et le second 0 est le nombre réel (ou scalaire) 0).*

Le produit scalaire sur E permet de définir une norme

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

par la formule

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

qui a un sens puisque $\langle u, u\rangle \geq 0$. Il permet aussi de définir une distance

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

par

$$d(u, v) = \|v - u\|$$

et l'angle θ entre deux vecteurs u et v sera lui donné par son cosinus

$$cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Le fait que cette formule soit exacte ($cos(\theta)$ est compris entre -1 et 1) est assuré par l'exercice

Exercice 1.3. *Montrer que $\mid \langle u, v\rangle \mid \leq \|u\|\|v\|$.*

Exercice 1.4. *Montrer que $\|.\|$ est bien une norme sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés :*

1. *$\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$.*

2. $\|\lambda u\| = \mid \lambda \mid \|u\|$ *pour tout* $u \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *pour tous* $u, v \in E$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.5. *Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire* $\langle ., . \rangle$.

Remarquer la condition de dimension finie dans cette définition. De plus dans un espace euclidien le produit scalaire et la norme sont intimement liés. On a vu que le produit scalaire définit la norme mais l'inverse aussi est vrai : ayant la norme on peut définir le produit scalaire comme le montre l'exercice suivant

Exercice 1.6. *Montrer que dans un espace euclidien on a :*

1. $4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.
2. $2\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$.
3. $2\langle u, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2$.

On sait que tout espace vectoriel E de dimension finie est isomorphe à un certain $\mathbb{R}^n$ avec n la dimension de E. Pour les exemples on se concentrera donc sur ceux-là.

Exemple 1.7. *Dans* $\mathbb{R}$ *tout élément non nul peut être vu comme un vecteur base. Par exemple tout nombre réel* λ *(vecteur) peut s'écrire* $\lambda = \lambda.1$ *et le vecteur* 1 *devient une base de* $\mathbb{R}$. *Un produit scalaire sur* $\mathbb{R}$ *est alors completement déterminé par sa valeur en* 1. *En effet on a*

$$\langle \lambda, \beta\rangle = \langle \lambda.1, \beta.1\rangle = \lambda\beta\langle 1, 1\rangle$$

Tout nombre réel positif non nul peut être choisi comme valeur de $\langle 1, 1\rangle$. *Le produit scalaire correspondant à la valeur* $\langle 1, 1\rangle = 1$ *aura pour norme la valeur absolue usuelle sur* $\mathbb{R}$ *puisqu'on a*

$$\|\lambda\| = \sqrt{\langle \lambda, \lambda\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \mid \lambda \mid$$

Exemple 1.8. *Soient* $e_1 = (1, 0)$ *et* $e_2 = (0, 1)$ *les deux vecteurs formant la base canonique de* $\mathbb{R}^2$. *Tout autre vecteur* $u = (u_1, u_2)$ *s'écrit*

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2$$

On verifie facilement que la formule

$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. *On l'appelle le produit scalaire euclidien.*

Ce dernier exemple se généralise facilement à $\mathbb{R}^n$ pour tout n. Un des buts du cours est de montrer que tout produit scalaire sur un espace vectoriel de dimension finie est euclidien. Autrement dit il est toujours possible de trouver une base dans laquelle le produit scalaire a une expression simple comme celle de l'exemple.

Définition 1.9. *La matrice du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de l'espace vectoriel E (de dimension n) est la matrice $M = (a_{ij})$ avec*

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

Exercice 1.10. *Montrer que $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Un espace affine euclidien est un espace affine A dont la direction E est un espace euclidien. En choisissant un point origine O dans A, chaque point P de A peut être identifié au vecteur $\overrightarrow{OP}$ de E. On peut donc définir la longueur d'un point et la distance entre deux points par les formules

$$\|P\| = \|\overrightarrow{OP}\|$$

et

$$d(P, Q) = d(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$$

1.2 Orthogonalité

Soit E un espace euclidien de produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Définition 1.11. *deux vecteurs non nuls u et v dans E sont dit orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$ (ce qui donne $cos\theta = 0$ pour θ l'angle entre u et v). On note $u \perp v$. Si F est un sous-espace vectoriel de E son orthogonal est*

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in F\}$$

Proposition 1.12.
1. *pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.*
2. *On a toujours $E = F \bigoplus F^{\perp}$.*

Preuve. Démontrons la première assertion. On a $0 \in F^\perp$ puisque $\langle u, 0\rangle = 0$ pour tout $u \in E$. Si $v \in F^\perp$ on a $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = \lambda.0 = 0$ et donc $\lambda v \in F^\perp$. Enfin si $v_1 \in F^\perp$ et $v_2 \in F^\perp$, on a $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = 0 + 0 = 0$. Ceci montre que $v_1 + v_2 \in F^\perp$. Donc $F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E. Concernant la secone assertion l'écriture $E = F \bigoplus F^\perp$ veut dire que $F \cap F^\perp = \{0\}$ et $E = F + F^\perp$. Soit $u \in F \cap F^\perp$. Alors $\langle u, u\rangle = 0$ et donc $u = 0$. L'égalité $E = F + F^\perp$ se démontre par récurrence sur la dimension de F. Pour simplifier traitons le cas $dimF = 1$. Soit u un générateur de F. Soit $x \in E$. Si $x \in F$ on a $x = x + 0 \in F + F^\perp$. Si $x \notin F$ le vecteur $v = x - \frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u$ est dans $F^\perp$ et on a $x = u + v \in F + F^\perp$. □

Définition 1.13. *le vecteur* $proj_u(v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$ *est appelé la projection orthogonale de* v *le long (ou dans la direction) de* u.

Exercice 1.14. *Montrer que* $v - proj_u v$ *est orthogonal à* u.

Définition 1.15. *Une base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *d'un espace euclidien* E *est dite orthogonale si*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

pour tout $i \neq j$ *(les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux). La base est dite orthonormale si de plus*

$$\langle e_i, e_i\rangle = 1$$

pour tout i *(tous les vecteurs de la base sont de norme* 1*).*

Les bases orthonormales sont trés importantes car elles permettent de simplifier les calculs de manière considérable. En effet dans une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ orthonormale, le produit scalaire a une expression trés simple :

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

si $u = u_1e_1 + \ldots + u_ne_n$ et $v = v_1e_1 + \ldots + v_ne_n$ et $n = dimE$ (Autrement dit dans cette base le produit scalaire est euclidien). Nous allons montrer que tout espace euclidien a une base orthonormale.

Théorème 1.16. *Tout espace euclidien* E *a une base orthonormale.*

Preuve. On utilise le procédé de Gram-Schmidt. L'idée est de commencer avec une base quelconque de E et de la transformer jusqu'à obtenir une base orthonormale. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E avec n la dimension de E. On pose $u_1 = v_1$ et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. La norme de e_1 est 1. On pose ensuite $u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2)$ et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$. Le vecteur e_2 est aussi de norme 1 et est orthognal à e_1. On continue avec $u_3 = v_3 - proj_{u_1}(v_3) - proj_{u_2}(v_3)$ et $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$. Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont orthogonaux et sont tous de norme 1. En général on pose $u_i = v_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} proj_{u_j}(v_i)$ et $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. On finit avec $u_n = v_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} proj_{u_j}(v_n)$ et $e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. La base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormale. $\square$

Exemple 1.17. *Soit $E = \mathbb{R}^2$. avec la base formée des deux vecteurs $v_1 = (3,1)$ et $v_2 = (2,2)$. On a $u_1 = v_1 = (3,1)$ et $\|u_1\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$. Donc $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. De même $u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2) = (\frac{-2}{5}, \frac{6}{5})$ et $e_2 = (\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.*

Exercice 1.18. *Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien. On pose $v_1 = (1,2,-1,1)$ et $v_2 = (0,3,1,-1)$. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par v_1 et v_2.*

1. *Déterminer une base orthonormale de F.*
2. *Donner un système d'équations pour $F^\perp$.*

1.3 Projection orthogonale et Symétrie

Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace de E. On sait que $E = F \bigoplus F^\perp$. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique

$$x = u + v$$

avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$.

Définition 1.19. *L'application*

$$p_F : E \longrightarrow E$$

donnée par $p_F(x) = u$ est appelée la projection orthogonale sur F.

C'est une application linéaire sur E d'image F et de noyau $F^\perp$. On a

$$p_F(x) = u \Leftrightarrow x - u \in F^\perp$$

Exercice 1.20. *1. Montrer que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

2. On appelle distance de x à F le nombre $d(x, F) = inf_{u \in F}\|x - u\|$. Montrer que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Exercice 1.21. *Soit $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien et soit F son sous-espace vectoriel donné par les deux équations $x + y + z + t = 0$ et $x - y + z - t = 0$.*

1. *Determiner $F^\perp$ et donner la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Calculer $d(x, F)$ avec $x = (1, 1, 1, 1)$.*

Définition 1.22. *La symétrie orthogonale (par rapport à F)*

$$s_F : E \longrightarrow E$$

est l'application linéaire égale à Id_F sur F et à $-Id_{F^\perp}$ sur $F^\perp$.

Si $x \in E$ avec $x = u + v, (u \in F, v \in F^\perp)$, on a

$$s_F(x) = u - v$$

Cette application garde intacts les éléments de F et transforme les éléments $v \in F^\perp$ en leurs symétriques $-v$.

Exercice 1.23. *Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ et de son produit scalaire canonique. Soit le sous-espace $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.*

1. *Déterminer $F^\perp$.*
2. *Quelle est la matrice de s_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Soit A un espace affine euclidien de direction l'espace euclidien E. Soit B un sous-espace affine de A de direction le sous-espace vectoriel F de E. Soit $O \in B$ et soit $P \in A$. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est dans $E = F \bigoplus F^\perp$. Il existe donc $u \in F$ et $v \in F^\perp$ tels que $\overrightarrow{OP} = u + v$. Soit Q l'unique point de B tel que $\overrightarrow{OQ} = u$. Ceci définit

$$p_B : A \longrightarrow A$$

donnée par $p_B(P) = Q$. C'est la projection orthogonale sur B.

Exercice 1.24. *Montrer que p_B est une application affine et que $\overrightarrow{p_B} = p_F$.*

On définit aussi la symétrie orthogonale (par rapport à B)

$$s_B : A \longrightarrow A$$

par $s_B(P) = Q$ avec Q le point correspondant au vecteur $u-v$ (si $\overrightarrow{OP} = u+v$).

Exercice 1.25. *Montrer que s_B est une application affine et que $\overrightarrow{s_B} = s_F$.*

Chapitre 2

Courbes et Surfaces

Ce chapitre introduit rapidement les courbes et les surfaces paramétriques (définies donc par un paramètre dans un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$). Comme son nom l'indique une courbe a une certaine courbure et l'un des buts de ce chapitre est de rendre cette notion compréhensible pour les étudiants. Outre sa définition on donnera également des formules pour la calculer. Une surface s'étudie en inspectant les courbes définies sur elles. C'est ainsi qu'on définira aussi différentes courbures sur la surface.

2.1 Courbes paramétriques

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (par exemple $I =]0, 2\pi[$ ou encore $I =]-\infty, +\infty[$).

Définition 2.1. *Une courbe paramétrique dans $\mathbb{R}^n$ est une application*

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

donnée par $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ et $\gamma_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^∞ (indéfiniment dérivable) pour $i = 1, \ldots, n$.

Il y a deux conditions dans cette définition : l'intervalle I doit être ouvert et les fonctions γ_i doivent être dérivables ansi que toutes leurs dérivées. La signification de la première condition apparaîtra un peu plus tard. La seconde est facile à comprendre : on va effectuer un certain nombre de calculs qui font intervenir des derivées et il est naturel de supposer que ces derivées existent. A vrai dire c'est l'image $C = \gamma(I)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est la vraie courbe et γ

n'est qu'une paramétrisation de C (qui peut en avoir plusieurs). La courbe sera dite plane si $n = 2$ et sera dite gauche (ou spatiale) si $n = 3$. Ce sont essentiellement toutes les courbes qu'on va étudier dans ce chapitre.

Exemple 2.2. *Soit $\gamma :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$. Ici $I =]-\infty, +\infty[$ est ouvert et $\gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = t^2$ sont C^∞. L'image de I par γ est $C = \gamma(I) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ et γ est donc la paramétrisation de la parabole dans $\mathbb{R}^2$. Une autre paramétrisation possible de la même parabole est $\gamma(t) = (2t, 4t^2)$ sur le même intervalle I.*

Exemple 2.3. *Soit $\gamma :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$. Ce n'est pas une courbe paramétrique car $\gamma_2(t) = \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en $t = 0$.*

Exercice 2.4. *Soit $\gamma : I =]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (2cost, 2sint)$.*

1. *Montrer que c'est une courbe paramétrique. Quelle est la courbe dans $\mathbb{R}^2$ representée par cette paramétisation.*
2. *Mêmes questions pour $I =]0, 4\pi[$ et $I =]-\infty, +\infty[$.*

2.2 Vecteur tangent, vitesse et accéleration

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique. Soit $P = \gamma(t_0)$ un point de la courbe avec $t_0 \in I$.

Définition 2.5. *Le vecteur tangent en le point $P = \gamma(t_0)$ est le vecteur $\gamma^{'}(t_0) = (\gamma_1^{'}(t_0), \ldots, \gamma_n^{'}(t_0))$. On l'appelle aussi le vecteur vitesse de la courbe en t_0.*

Le point $P = \gamma(t_0)$ est dit singulier si $\gamma^{'}(t_0) = (\gamma_1^{'}(t_0), \ldots, \gamma_n^{'}(t_0)) = 0$. Sinon on dira que c'est un point régulier ou non singulier. La courbe sera dite régulière si elle n'a pas de point singulier.

Exemple 2.6. *Soit $I =]-\infty, +\infty[$. Le vecteur vitesse de $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$ en tout t est $\gamma^{'}(t) = (1, 2t)$. Ce vecteur n'est jamais nul et donc la courbe est régulière. Pour le même I et $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, on a $\gamma^{'}(t) = (2t, 3t^2)$ et la courbe aura un point singulier en le point $P = \gamma(0) = (0, 0)$.*

Exercice 2.7. *Quels sont les points singuliers des courbes de l'exercice 2.4 ?*

Définition 2.8. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique. La fonction vitesse de la courbe est la fonction*

$$\mid \gamma' \mid : I \longrightarrow [0, +\infty[$$

donnée par $\mid \gamma' \mid (t) = \|\gamma'(t)\|$, la norme du vecteur tangent provenant du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.9. *Montrer que la vitesse de la courbe est nulle en un point si et seulement si ce point est singulier.*

Un point singulier est donc un point en lequel la courbe s'arrête (sa vitesse est nulle). C'est un point en lequel il est difficile de dessiner le vecteur tangent. Ces points sont considérés comme pathologiques et on essaiera de les éviter dans ce cours (ne serait ce que pour ne pas diviser par 0). La condition que l'intervalle I soit ouvert vient de là. En effet si $I = [a, b]$ alors la courbe va commencer en $t = a$ et finir en $t = b$. Elle aura donc au moins deux points d'arrêt : au début et à la fin et aura donc au moins deux points singuliers.

Définition 2.10. *Une courbe γ sera dite à vitesse unité si sa fonction vitesse est constante égale à 1 :*

$$\mid \gamma' \mid = 1$$

La longueur du vecteur tangent en tout point de la courbe est donc constante égale à 1. Ces courbes seront trés importantes pour définir la courbure d'une courbe. Il en existe beaucoup (par exemple $\gamma(t) = (cost, sint)$) et on va montrer que toute courbe régulière va admettre une paramétrisation qui est à vitesse unité.

Exercice 2.11. *Montrer qu'une courbe à vitesse unité est régulière.*

Définition 2.12. *Le vecteur accéléraration de la courbe γ en tout t est sa seconde dérivée $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \ldots, \gamma_n''(t))$.*

L'existence d'un tel vecteur est assurée par les conditions de la définition d'une courbe paramétrique. Ce vecteur (ou plus exactement sa longueur) sera utilisé pour définir la courbure.

Exercice 2.13. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien (dans la base canonique). Soient deux vecteurs $u(t)$ et $v(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ fonctions du paramètre t. Leur produit scalaire $f(t) = \langle u(t), v(t) \rangle$ est donc une fonction t.*

1. *Montrer que* $f^{'}(t) = \langle u^{'}(t), v(t)\rangle + \langle u(t), v^{'}(t)\rangle$.
2. *En déduire que pour une courbe à vitesse unité le vecteur tangent* $\gamma^{'}(t)$ *et le vecteur accélération* $\gamma^{''}(t)$ *sont toujours orthogonaux (pour le produit scalaire euclidien dans* $\mathbb{R}^n$*).*

2.3 Reparamétrisation

Définition 2.14. *Une reparamétrisation de la courbe* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une autre courbe* $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que*

1. *Il existe un difféomorphisme* $h : J \longrightarrow I$
2. $h^{'}(u) > 0$ *pour tout* $u \in J$
3. $\beta = \gamma \circ h$*, c'est-à-dire* $\beta(u) = \gamma(h(u))$ *pour tout* $u \in J$.

Intuitivement β et γ représentent la même courbe. Difféomorphisme veut dire que h est dérivable bijective et que l'application inverse h^{-1} est aussi dérivable. La condition $h^{'}(u) > 0$ assure que β et γ traversent la courbe dans le même sens.

Exemple 2.15. *Soient les courbes paramétriques* $\gamma : I =]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donnée par* $\gamma(t) = (t, t^2)$ *et* $\beta : J =]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donnée par* $\beta(u) = (u^3, u^6)$*. Si on pose* $h : J \longrightarrow I$ *donnée par* $h(u) = u^3$ *alors* β *est une reparamétrisation de* γ*. En effet* h *est clairement un difféomorphisme (remarquer le demi-intervalle) et* $h^{'}(u) = 3u^2 > 0$*. Enfin on a bien* $\beta = \gamma \circ h$.

Exercice 2.16. *Montrer que si* γ *est régulière, toute reparamétrisation* β *de* γ *est aussi régulière.*

Sur l'ensemble des courbes paramétriques on définit une relation en disant que β est en relation avec γ si et seulement si β est une reparamétrisation de γ.

Exercice 2.17. *Montrer que cette relation est une relation d'équivalence (reflexive, symétrique et transitive).*

Cette relation de reparamétrisation va nous permettre de donner la définition définitive d'une courbe

Définition 2.18. *Une courbe dans* $\mathbb{R}^n$ *est une classe d'équivalence de courbes paramétriques dans* $\mathbb{R}^n$.

La classe de la courbe paramétrique γ sera notée $[\gamma]$. On a

$$[\gamma] = \{\beta \mid \beta \Re \gamma\}$$

avec $\Re$ la relation de reparamétrisation. Dans la suite on va montrer que toute courbe paramétrique régulière va avoir une reparamétrisation par une courbe à vitesse unité. Ce résultat est primordial pour définir la courbure.

Définition 2.19. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. La fonction longueur d'arc de γ en $t_0 \in I$ est la fonction $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \mid \gamma^{'}(u) \mid du$$

$s(t)$ est la longueur de la courbe entre le point $\gamma(t_0)$ et le point $\gamma(t)$. Elle est nulle pour $t = t_0$, négative pour $t < t_0$ et positive pour $t > t_0$.

Exemple 2.20. *Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (rcost, rsint)$ avec $r > 0$. Calculons $s(t)$ en $t_0 = 0$. On a $\gamma^{'}(t) = (-rsint, rcost)$ et $\mid \gamma^{'}(t) \mid = \sqrt{r^2 sin^2 t + r^2 sin^2 t} = r$. Donc $s(t) = \int_0^t rdu = tr$. Par exemple pour $t = 2\pi$, on a $s(2\pi) = 2\pi r$ la longueur du cercle de rayon r.*

Contrairement à cet exemple la fonction $s(t)$ est en général difficile à calculer (comme toute intégrale). Par définition même la dérivée de s se calcule facilement

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \mid \gamma^{'}(u) \mid du = \mid \gamma^{'}(t) \mid$$

En particulier on $\frac{ds}{dt} > 0$. Soit $J = s(I)$ l'image de I par s. Du cours d'Analyse on sait que J est aussi un intervalle ouvert et que $s : I \longrightarrow J$ est bijective. Elle a donc une fonction inverse $s^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 2.21. *Montrer que s^{-1} est dérivale et que $(s^{-1})^{'}(u) = \frac{1}{s^{'}(s^{-1}(u))}$. En déduire que $(s^{-1})^{'} > 0$.*

On va utiliser s^{-1} pour reparamétriser γ.

Théorème 2.22. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière et soit s sa fonction longueur d'arc en $t_0 \in I$. Soit s^{-1} la fonction inverse de s sur $J = s(I)$. Alors $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\beta(u) = \gamma(s^{-1}(u))$ est une reparamétrisation de γ. De plus β est une courbe à vitesse unité.*

Preuve. On prend $h = s^{-1}$. D'aprés l'exercice 2.21 on sait que h est un difféomorphisme et que $h^{'} > 0$. Par définition on a $\beta = \gamma \circ h$. Donc β est bien une reparamétrisation de γ. Montrons que β est à vitesse unité. Pour cela calculons sa fonction vitesse

$$\begin{aligned}
\mid \beta^{'}(u) \mid &= \mid (\gamma \circ s^{-1})^{'}(u) \mid \\
&= \mid \gamma^{'}(s^{-1}(u))(s^{-1})^{'}(u) \mid \\
&= \mid \gamma^{'}(s^{-1}(u)) \frac{1}{s^{'}(s^{-1}(u))} \mid \\
&= \mid \gamma^{'}(s^{-1}(u)) \frac{1}{\mid \gamma^{'}(s^{-1}(u)) \mid} \mid \\
&= \frac{\mid \gamma^{'}(s^{-1}(u)) \mid}{\mid \gamma^{'}(s^{-1}(u)) \mid} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ici on a utilisé le résultat de l'exercice 2.21 : $(s^{-1})^{'}(u) = \frac{1}{s^{'}(s^{-1}(u))}$ et l'égalité déja vue $s^{'}(t) = \mid \gamma^{'}(t) \mid$ appliquée à $t = s^{-1}(u)$. □

Cette reparamétrisation de γ est appelée la reparamétrisation par la longueur d'arc.

Exercice 2.23. *On reprend les données de l'exemple 2.20. Déterminer la reparamétrisation par la longueur d'arc β de γ et vérifier que β est bien une courbe à vitesse unité.*

2.4 Courbure

On peut maintenant définir la courbure d'une courbe régulière. Intuitivement c'est le changement de direction du vecteur tangent quand celui-ci passe d'un point à un autre de la courbe. Le changement d'un vecteur (ou d'une fonction) est codé par sa dérivee et donc ici par le vecteur accélération. La définition exacte est la suivante

Définition 2.24. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique régulière. Si γ est à vitesse unité sa courbure est la fonction*

$$\kappa_\gamma : I \longrightarrow [0, +\infty]$$

donnée par $\kappa_\gamma(t) = \mid \gamma^{''}(t) \mid$ *(la longueur du vecteur accélération par rapport au produit scalaire euclidien dans* $\mathbb{R}^n$*). Si* γ *n'est pas à vitesse unité, sa courbure est* $\kappa_\gamma(t) = \kappa_\beta(s(t)) = \mid \beta^{''}(s(t)) \mid$ *avec* β *la reparamétrisation de* γ *par la longueur d'arc et* s *sa fonction longueur d'arc (on sait que* β *est à vitesse unité).*

Remarquer que la courbure est une fonction positive et qu'elle change donc d'un point à un autre de la courbe. Elle ne concerne que les courbes régulières. On commence par regarder si la courbe est à vitesse unité ou non. Si elle l'est on utilise la première définition. Sinon on est obligé de passer par la reparamétrisation β.

Exemple 2.25. *Soit* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *donnée par* $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cost, sint, t)$*. On a*

$$\gamma^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sint, cost, 1)$$

et donc $\mid \gamma^{'}(t) \mid = 1$ *pour tout* t*. La courbe est à vitesse unité. On a*

$$\gamma^{''}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cost, -sint, 0)$$

et donc

$$\kappa_\gamma(t) = \mid \gamma^{''}(t) \mid = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans cet exemple la courbure est une fonction constante.

Exercice 2.26. *On reprend les données de l'exemple 2.20 et de l'exercice 2.23. Calculer la courbure de la courbe* γ*.*

Exercice 2.27. *Soit* $\gamma(t) = (t, 3t + 1)$ *une droite dans* $\mathbb{R}^2$ *(pour* $t \in \mathbb{R}$*). Verifier que sa courbure est nulle.*

Pour une courbe qui n'est pas à vitesse unité, il est en général difficile de calculer la courbure en utilisant la définition (ce qui provient de la difficulté de calculer s et donc β). On va plutôt utiliser la

Proposition 2.28. *Soit* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une courbe régulière. Alors on a*

1. $$\kappa_\gamma(t) = \mid \frac{1}{\mid \gamma^{'}(t) \mid} \frac{d}{dt} \frac{\gamma^{'}(t)}{\mid \gamma^{'}(t) \mid} \mid$$

2.
$$\kappa_\gamma(t) = \mid \frac{\gamma''(t)}{\mid \gamma'(t) \mid^2} - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\mid \gamma'(t) \mid^4} \gamma'(t) \mid$$

Preuve. 1. On a $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \beta'(s(t))$ pour β la reparamétrisation par la longueur d'arc. Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'(t)}{\mid \gamma'(t) \mid}\right) = \beta''(s(t)).s'(t)$$

$$= \beta''(s(t)). \mid \gamma'(t) \mid$$

et

$$\kappa_\gamma(t) = \kappa_\beta(s(t)) = \mid \beta''(s(t)) \mid$$

$$= \mid \frac{1}{\mid \gamma'(t) \mid} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{\mid \gamma'(t) \mid} \mid$$

2. Posons $l(t) = \mid \gamma'(t) \mid = \sqrt{\sum_i \gamma_i'(t)^2}$. On a alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'}{\mid \gamma' \mid}\right) = \frac{l\gamma'' - l'\gamma'}{l^2}$$

On a $l = \sqrt{m}$ avec $m = \sum_i \gamma_i'(t)^2$ et donc $l' = \frac{1}{2}\frac{m'}{\sqrt{m^2}} = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{l}$. Ce qui nous donne

$$\kappa_\gamma(t) = \mid \frac{1}{\mid \gamma'(t) \mid} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{\mid \gamma'(t) \mid} \mid$$

$$= \mid \frac{1}{l} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{\mid \gamma'(t) \mid} \mid$$

$$= \mid \frac{1}{l}\left(\frac{l\gamma''}{l^2} - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{l}.\frac{\gamma'}{l^2}\right) \mid$$

$$= \mid \frac{\gamma''}{l^2} - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{l^4} \gamma' \mid$$

$$= \mid \frac{\gamma''(t)}{\mid \gamma'(t) \mid^2} - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\mid \gamma'(t) \mid^4} \gamma'(t) \mid$$

□

Exercice 2.29. *En utilisant ces formules calculer la courbure des courbes suivantes*

1. *la droite* $\gamma(t) = (t, at + b)$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.
2. *le cercle de rayon* r, $\gamma(t) = (rsint, rcost)$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.

Définition 2.30. *Le vecteur tangent unité de* γ *en* t *est*

$$T(t) = \frac{\gamma^{'}(t)}{\mid \gamma^{'}(t) \mid}$$

On a $\mid T(t) \mid = 1$ pour tout $t \in I$ et $T(t) = \gamma^{'}(t)$ si γ est à vitesse unité. En général T et $\gamma^{'}$ sont colinéaires et ont le même sens. Comme corollaire de la proposition, on obtient facilement une autre formule donnant la courbure

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\mid T^{'}(t) \mid}{\mid \gamma^{'}(t) \mid}$$

2.5 Surfaces

Définition 2.31. *Une surface paramétrique est une application lisse* (C^∞)

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

avec U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *(pour la topologie euclidienne).*

Une telle application s'écrit donc $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_n(x, y))$ pour $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^∞ sur U et $(x, y) \in U$. Le plus souvent on va considérer des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ (et donc $n = 3$).

Exemple 2.32. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *donnée par* $f(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$. *Ici* $U = \mathbb{R}^2$ *et* $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y$ *et* $f_3(x, y) = x^2 - y^2$ *qui sont toutes des fonctions* C^∞.

Exercice 2.33. *Que représente dans* $\mathbb{R}^3$ *la surface* $f(x, y) = (x, y, 0)$ *(avec* $U = \mathbb{R}^2$*).*

Le rôle joué par le vecteur tangent dans le cas des courbes est joué ici par ce qu'on appelle les vecteurs de coordonnées

Définition 2.34. *On appelle vecteurs de coordonnées de la surface f (dans $\mathbb{R}^3$) les deux vecteurs*

$$E_1(x, y) = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x})$$

et

$$E_2(x, y) = (\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y})$$

E_1 mesure le changement de f dans la direction des x et E_2 mesure son changement dans la direction des y. Rappelons que le produit vectoriel de deux vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ est le vecteur $w = u \times v = (w_1, w_2, w_3)$ donné par $w_1 = u_2v_3 - v_2u_3, w_2 = v_1u_3 - u_1v_3$ et $w_3 = u_1v_2 - v_1u_2$. Remarquer que $u \times v = 0$ si et seulement si $u = 0$ ou $v = 0$ ou u, v linéairement dépendants et que $u \times v$ est orthogonal à u et à v.

Définition 2.35. *La surface est dite régulière en le point $P = (x_0, y_0) \in U$ si $E_1(x_0, y_0) \times E_2(x_0, y_0) \neq (0, 0, 0)$ ou de manière équivalente si $E_1(x_0, y_0) \neq (0, 0, 0), E_2(x_0, y_0) \neq (0, 0, 0)$ et $E_1(x_0, y_0), E_2(x_0, y_0)$ linéairement indépendants. La surface est dite régulière si elle est régulière en tout point de U.*

Exemple 2.36. *Soit la surface de l'exemple 2.32. On a*

$$E_1(x, y) = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x})$$
$$= (1, 0, 2x)$$

et

$$E_2(x, y) = (\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y})$$
$$= (0, 1, -2y)$$

Cherchons les points réguliers de cette surface. Pour cela on calcule

$$E_1(x, y) \times E_2(x, y) = (-2x, 2y, 1) \neq (0, 0, 0)$$

pour tout x, y. La surface est donc régulière.

Exercice 2.37. *Quels sont les points réguliers de la surface $f(x, y) = (x, y^2, xy)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Définition 2.38. *Soit S la surface paramétrique $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pour tout $P = (x, y) \in U$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs de coordonnées $E_1(P)$ et $E_2(P)$ est appelé l'espace tangent de la surface en le point P. On le note T_PS :*

$$T_PS = \{\alpha E_1(P) + \beta E_2(P), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

T_PS est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2. Son orthogonal (et donc son supplémentaire) est l'espace normal de la surface en le point P. On le note N_PS. Il est de dimension 1 engendré par le vecteur $E_1(P) \times E_2(P)$.

Exercice 2.39. *Soit la surface $f : U = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y) = (x, y, xy)$. Soit $P = (3, -2) \in U$.*

1. *Déterminer T_PS et N_PS.*
2. *Soient les vecteurs $u = (1, 2, 4), v = (2, 1, 1)$ et $w = (-4, 6, -2)$. Montrer que $u \in T_PS$, que $w \in N_PS$ mais que $v \notin T_PS$ et $v \notin N_PS$.*

Arrivé ici et en comptant le chapitre sur la Géométrie affine, il est possible de passer l'examen final en cas de reprise. Autrement dit l'examen ne portera que sur les notions vues ici. Bonne chance.