Chapitre 3

Modèles ARMA.

Dans ce chapitre, nous présentons une importante famille paramétrique de séries temporelles stationnaires, de processus autorégressif en moyenne mobile ou ARMA. Pour une grande classe de fonctions d'autocovariance $\gamma(.)$, il est possible de trouver un processus ARMA X_t avec fonction d'autocovariance $\gamma_X(.)$ tel que $\gamma(.)$ soit bien approché par $\gamma_X(.)$. En particulier, pour tout entier positif m, il existe un processus ARMA X_t tel que $\gamma_X(.) = \gamma(h)$ pour $h = 0, 1, ..., m$. Pour cette raison (et d'autres), la famille des processus ARMA joue un rôle clé dans la modélisation des données chronologiques.

3.1 Processus ARMA

Dans la section (2.2), nous avons introduit un processus ARMA (1,1) et nous avons discuté de certaines de ses principales propriétés. Il s'agissait notamment de l'existence et de l'unicité des solutions stationnaires des équations définissantes et des concepts de causalité et d'inversibilité. Dans cette section, nous étendons ces notions au processus général ARMA (p, q).

Définition 11 *Le processus stochastiques X_t est un ARMA(1,1) s'il est stationnaire et satisfait (pour chaque t)*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - ... - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \tag{3.1.1}$$

Où ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 et les polynômes $1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p, 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$, n'ont pas de zéros communs.

Le processus X_t est considéré comme un processus ARMA (p, q) de moyenne μ si $X_t - \mu$ est un processus ARMA (p, q).
Il est pratique d'utiliser la forme plus simple de (3.1.1).

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t \tag{3.1.2}$$

où les polynômes Φ, Θ sont des polynômes de variable B d'ordre p, q respectivement

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p$$

et

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$$

et B l'opérateur retard $B^jX_t = X_{t-j}, B^j\varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}, j = 0, \pm 1, ...$).

Remarque 5 *La série chronologique X_t est un processus autorégressif d'ordre p (ou AR (p)) si $\Theta(B) = 1$ et un processus d'ordre moyen mobile q (ou MA (q)) si $\Phi(B) = 1$.*

Une partie importante de la définition (11) est l'exigence que X_t soit stationnaire.

Dans la section 2.2, nous avons montré, pour les équations (2.2.1) de l'ARMA (1,1), qu'une solution stationnaire existe (et est unique) si et seulement si $\phi_1 \neq \pm 1$. Cette dernière condition est équivalente à la condition que le polynôme autorégressif $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z \neq 0$ pour $z = \pm 1$. La condition analogue pour le processus général ARMA (p, q) est $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - ... - \phi_p z^p \neq 0$ pour tout complexe z avec $|z| = 1$. Si $\Phi(z) \neq 0, \forall z : |z| = 1$, alors le polynôme $\Phi(z)$ est inversible et il éxiste une suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\alpha_i z^i.$$

En multipliant 3.1.2 par $\frac{1}{\Phi(z)}$ nous aurons

$$X_t = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)}\varepsilon_t = \Psi(B)\varepsilon_t = \Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\psi_i\varepsilon_{t-i}.$$

et on a

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1 \\
\psi_1 &= \theta_1 + \psi_0\phi_1 \\
\psi_2 &= \theta_2 + \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0 \\
.. &\quad .. \\
\psi_j &= \theta_j + \Sigma_{k=1}^{p}\phi_k\psi_{j-k}
\end{aligned}$$

où $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0, \forall j > q$ et $\psi_j = 0, \forall j \leq 0$.

Proposition 4 *Soit X_t un processus ARMA(p,q),*

— *le processus X_t est stationnaire si et seulement si $\Phi(z) \neq 0, \forall z : |z| \neq 1$.*

— *le processus X_t est causal s'il éxiste une série ψ_j de sorte que $\Sigma_{j\geq 0}|\psi_j| < \infty$ et $X_t = \Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\psi_i\varepsilon_{t-i}$, ce qui est équivalent à la condition $\Phi(z) \neq 0$ pour tout $z, |z| < 1$.*

— *le processus X_t est inversible s'il éxiste une série π_j de sorte que $\Sigma_{j\geq 0}|\pi_j| < \infty$ et $\varepsilon_t = \Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\pi_i X_{t-i}$, ce qui est équivalent à la condition $\Theta(z) \neq 0$ pour tout $z, |z| < 1$.*

De la même manière pour calculer les coeficients ψ_j de la forme causal on trouve que les π_j vérifient la relation

$$\pi_j = -\phi_j - \Sigma_{k=1}^{p}\theta_k\pi_{j-k}$$

où $\phi_0 = -1$, $\varphi_j = 0, \forall j > q$ et $\pi_j = 0, \forall j < 0$.

Exemple 3.1.1 *Considérons le processus ARMA (1,1) X_t satisfaisant l'équation*

$$X_t - 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1} \tag{3.1.3}$$

Puisque le polynôme autorégressif $\Phi(z) = 1 - 0.5z$ a un zéro en $z = 2$, qui se situe en dehors du cercle unité, nous concluons qu'il existe un unique processus ARMA satisfaisant (3.1.3) qui est également causal. Les coefficients ψ_j dans la représentation causal de X_t sont :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1 \\
\psi_1 &= 0.4 + 0.5 \\
\psi_2 &= 0.5(0.4 + 0.5) \\
.. &\quad .. \\
\psi_j &= 0.5^{j-1}(0.4 + 0.5), \forall j \geq 1.
\end{aligned}$$

Le polynôme MA $\Theta(z) = 1 + 0.4z$ a un zéro en $z = -1/0.4 = -2,5$, qui se situe également à l'extérieur du cercle unité. Cela implique que X_t est *inversible avec des coefficients π_j donnés par :*

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 1 \\
\pi_1 &= -(0.4 + 0.5) \\
\pi_2 &= -(0.4 + 0.5)(-0.4) \\
.. & \quad .. \\
\pi_j &= -(0.4 + 0.5)(-0.4)^{j-1}, \forall j \geq 1.
\end{aligned}$$

Remarque 6 *Il convient de noter que la causalité et l'inversibilité sont des propriétés non seulement de X_t, mais plutôt de la relation entre les deux processus X_t et ϵ_t.*

3.2 La fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation

Dans cette section, nous abordons une méthode pour calculer la fonction d'autocovariance (ACV) $\gamma(.)$ d'un processus ARMA causal X_t. La fonction d'autocorrélation (FAC) est facilement retrouvée à partir de l'ACVF en divisant par $\gamma(0)$. La fonction d'autocorrélation partielle (FACP) se trouve également à partir de la fonction $\gamma(.)$.

3.2.1 La fonction d'autocovariance

D'abord, nous déterminons l'ACV $\gamma(.)$ du processus causal ARMA (p, q) défini par

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \tag{3.2.1}$$

où $\Phi(z) = 1 - \Sigma_{j=1}^{p}\phi_j z^j$ et $\Theta(z) = 1 - \Sigma_{j=1}^{q}\theta_j z^j$. La causalité implique que

$$X_t = \Sigma_{i\geq 0}\psi_i\varepsilon_{t-i}. \tag{3.2.2}$$

où $\Sigma_{i\geq 0}\psi_i\varepsilon_{t-i} = \Phi(z)/\Theta(z), |z| \leq 1.$

Méthode de calcul

Dans cette méthode, nous calculons tout d'abord les ψ_j utilisant la méthode expliquée dans la section3.1, puis nous calculons la fonction d'autocovariance, d'aprés la proposition 1 et la représentation (3.2.2) nous avons,

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2\Sigma_{i=0}^{+\infty}\psi_{i+h}\psi_i.$$

Exemple 3.2.1 *Prenons le processus ARMA(1,1) définie par*

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

avec $|\phi| < 1$, *la fonction d'autocovariance est :*

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= \sigma_\varepsilon^2 \Sigma_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \Big[1 + (\theta+\phi)^2 \Sigma_{i=0}^{+\infty} \phi^{2i}\Big] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \Big[1 + \frac{(\theta+\phi)^2}{1-\phi^2}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \sigma_\varepsilon^2 \Sigma_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+1} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta + \phi + (\theta+\phi)^2 \phi + \Sigma_{i=0}^{+\infty} \phi^{2i}\Big] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta + \phi + \phi \frac{(\theta+\phi)^2}{1-\phi^2}\Big]\end{aligned}$$

et

$$\gamma(h) = \phi^{h-1} \gamma_X(h-1).$$

3.2.2 La fonction d'autocorrélation

Rappelons que l'autocorélation d'un processus ARMA X_t est la fonction $\rho(.)$ trouvée immédiatement à partir de la fonction d'ACV $\gamma(.)$ par la relation :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}$$

De même, pour tout ensemble d'observations $x_1, ..., x_n$, l'autocorélation empirique est calculée par

$$\widehat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}$$

Proposition 5 *Soit X_t in processus MA(q) stationnaire, la fonction d'autocorrélation de X_t est*

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\theta_h + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \theta_{h+i}}{1+\sum_{i=1}^{q} \theta_i^2} & si\ 1 < h < q \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{3.2.3}$$

cette proposition nous permet d'identifier l'ordre des processus moyenne mobile.

3.2.3 La fonction d'autocorrélation partielle

La fonction d'autocorrélation partielle (FACP) d'un processus ARMA X_t est la fonction $\alpha(.)$ définie par les équations suivantes :

$$\alpha(h) = \begin{cases} 0 \text{ si} h = 0 \\ \phi_{hh} \quad \text{si} h \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.4}$$

avec ϕ_{hh} est la dernière composante de

$$\phi_h = \Gamma^{-1}(h)\gamma_h$$

où $\Gamma_p = \left[\gamma_X(i-j)\right]_{i,j=1,p}$ est la matrice d'autocovariance et $\gamma_h = \left(\gamma_X(1), ..., \gamma_X(h)\right)$.

Proposition 6 *Soit X_t un processus AR(p) causal et stationnaire, la fonc-*

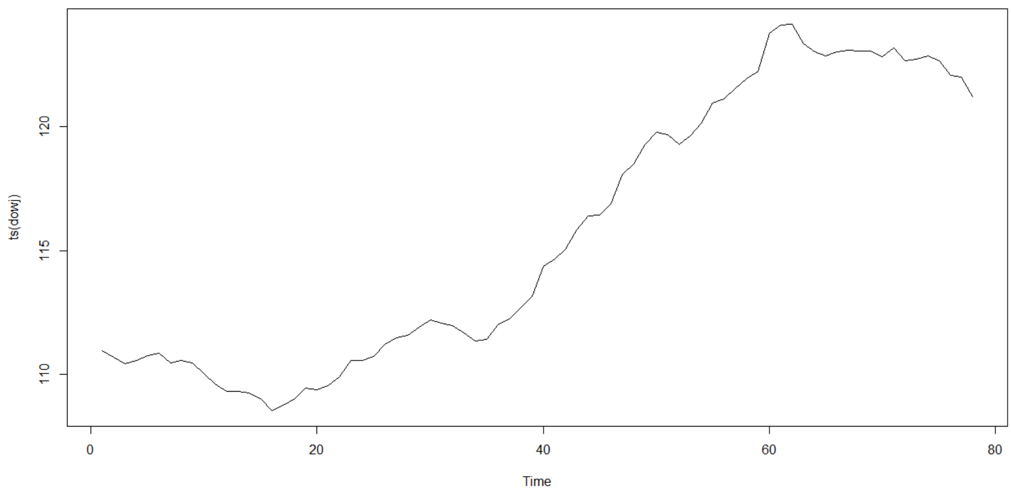

FIGURE 3.1 – Dow Jones

tion d'autocorrélation partielle de X_t est

$$\alpha(h) = \begin{cases} \phi_p \ si\ h = p \\ 0 \quad si\ h \geq p \end{cases} \tag{3.2.5}$$

cette proposition nous permet d'identifier l'ordre des processus autorégressifs.

Exemple 3.2.2 *Prenons la série chronologique de l'évolution de l'indice boursier Dow Jones représenté dans (3.2), la représentation des autocorréla-tions partielles nous montre qu'ils sont significativement minime à partir du lag $h = 3$, ce qui nous permet de dire que ce processus est AR(2),*

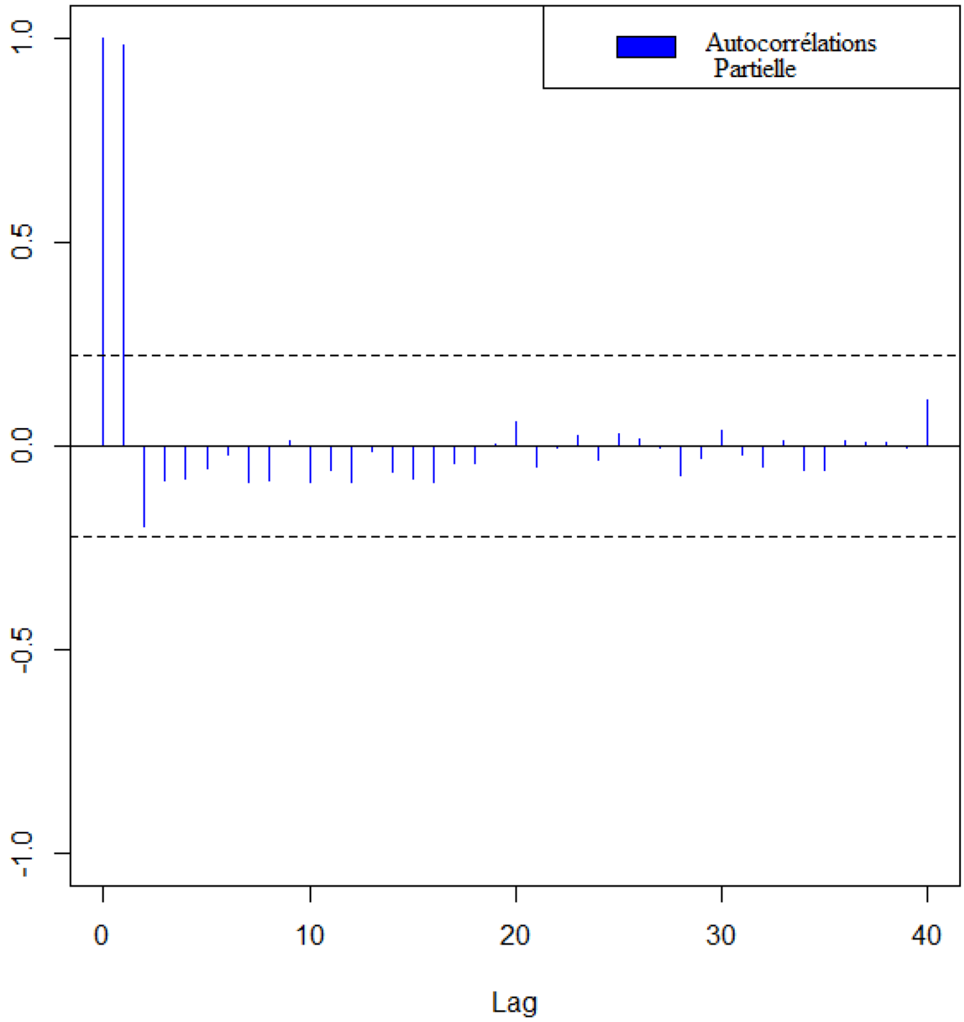

Figure 3.2 – Autocorrélations partielle

3.3 Estimation des paramètres

3.3.1 Estimateur de Yule Walker

Pour un modèle autorégressif pur, le polynôme moyen $\Theta(z)$ est égale à 1, et l'hypothèse de causalité de l'ARMA nous permet d'écrire X_t sous la forme causal

$$X_t = \Sigma_{i\geq 0}\psi_i\varepsilon_{t-i}. \tag{3.3.1}$$

Multipliant chaque côté de 3.2.1 par $X_{t-i}, i = 0, 1, 2, ..., p$, prenant l'espérance et en utilisant (3.3.1) pour évaluer le côté droit de la première équation, on obtient les équations de Yule-Walker

$$\begin{cases} \Gamma_p\phi = \gamma_p \\ \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_X(0) - \phi'\gamma(p) \end{cases} \tag{3.3.2}$$

où $\Gamma_p = \left[\gamma_X(i-j)\right]_{i,j=1,p}$ est la matrice d'autocovariance, $\phi = (\phi_1, ..., \phi_p)$ et $\gamma_p = \left(\gamma_X(1), ..., \gamma_X(p)\right)$. Ces équations peuvent être utilisées pour déterminer $\gamma_X(0), ..., \gamma_X(p)$ utilisant σ_ε^2 et ϕ.

Si on remplace les covariances $\gamma_X(j), j = 0, ..., p$, apparaissant dans (3.3.3) par les autocovariances empiriques correspondantes $\widehat{\gamma}_X(j)$, on obtient un ensemble d'équations appelées estimateur de Yule-Walker,

$$\begin{cases} \widehat{\Gamma}_p\widehat{\phi} = \widehat{\gamma}_p \\ \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \widehat{\gamma}_X(0) - \widehat{\phi}'\widehat{\gamma}(p) \end{cases} \tag{3.3.3}$$

où $\widehat{\Gamma}_p = \left[\widehat{\gamma}_X(i-j)\right]_{i,j=1,p}$ est la matrice d'autocovariance, $\widehat{\phi} = (\widehat{\phi}_1, ..., \widehat{\phi}_p)$ et $\widehat{\gamma}_p = \left(\widehat{\gamma}_X(1), ..., \widehat{\gamma}_X(p)\right)$.

Si $\widehat{\gamma}_X(0) > 0$ alors $\widehat{\Gamma}_p$ est non singulière, donc on peut réecrire (3.3.3) sous la forme

$$\begin{cases} \widehat{\phi} = \widehat{R}_p^{-1}\widehat{\rho}_p \\ \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \widehat{\gamma}_X(0)\left[1 - \widehat{\rho}_p'\widehat{R}_p^{-1}\widehat{\rho}_p\right] \end{cases} \tag{3.3.4}$$

où $\widehat{\rho} = (\widehat{\rho}(1), ..., \widehat{\rho}(p)) = \widehat{\gamma}_p/\widehat{\gamma}(0)$.

Remarque 7 *L'argument du paragraphe précédent montre que, pour chaque matrice d'autocovariance non sinigulère de la forme* $\Gamma_p = \left[\gamma_X(i-j)\right]_{i,j=1,p}$ *il existe un processus AR (p) dont les autocovariances aux ordres* $0, ..., p$ *sont* $\gamma(0), ..., \gamma(p)$. *Les coefficients requis et la variance du bruit blanc se trouvent à partir de (3.3.3) lors du remplacement de* $\rho(j)$ *par* $\gamma(j)/\gamma(0), j = 0, ..., p$ *et* $\widehat{\gamma}_X(0)$ *par* $\gamma_X(0)$.

3.3.2 La fonction de vraisemblance pour l'ARMA

Soit X_t un processus stochastique ARMA, considérons $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de n variables aléatoire du processus X_t qui a comme densité conjointe la fonction $f(X/\beta)$ dépendant de β et $x = (x_1, ..., x_n)$ une observation de ce vecteur.

À partir de l'observation x on estime la valeur $\widehat{\beta}$ de β qui rend le modèle

compatible aux observations, autrement dit on cherche la valeur de β qui rend $f(\beta/X)$ compatible , au maximum, pour l'ensemble d'observations.
Prenons le processus X_t définit précédemment par :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + ... = \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\Rightarrow$$

$$\varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - ... - \phi_p X_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

On voit que les $(\varepsilon_t)_{t=1,n}$ dépondent du processus X et du paramètre β, cependant on ne peut pas calculer les $(\varepsilon_t)_{t=1,n}$ directement à partir de l'équation (3.1.1) car cela nécessite des valeurs initiales. Pour cette raison supposons qu'on a p valeurs initiales du processus $X_* = (X_0, X_{-1}, ..., X_{1-p})$ et q valeurs du bruit blanc $\varepsilon_* = (\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, ..., \varepsilon_{1-p})$ dans ce cas les $(\varepsilon_t)_{t=1,...,n}$ peuvent être calculer directement de la relation ci-dessus conditionnellement aux valeurs initiales.
Ainsi, pour n'importe quel choix des paramètres et des valeurs initiales, on peut calculer successivement un ensemble de valeurs des $(\varepsilon_t)_{t=1,...,n}$.
La loi conjointe des $(\varepsilon_t)_{t=1,...,n}$ qui sont des variables identiquement équidistribuéEs de loi gaussienne centréE et d'écart type σ_ε^2 est :

$$f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\Sigma_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}$$

Or, pour une série chronologique donnée de $(x_t)_{t=1,n}$ le logarithme de la fonction de vraisemblance conditionnée par le choix de passé du processus X_* et du bruit ε_* est,

$$L(\phi, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = \frac{-n}{2} - nln(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{\Sigma_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \tag{3.3.5}$$

3.3.3 L'estimateur du Maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance est la valeur de β qui maximise la fonction de vraisemblance L. Dans la pratique en remplace le passé du processus X_* et celui du bruit ε_* par zéro.

Or, la fonction de vraisemblance en tant que fonction de β n'est pas une forme quadratique ; c'est d'ailleurs ; pour cette raison qu'on utilise des méthodes itératives afin de la maximiser . Autrement dit la détermination de $\widehat{\beta}$. Une fois $\widehat{\beta}$ estimé, la valeur de σ_ε^2 peut être calculée en maximisant L par rapport à σ_ε^2

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{-n}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{\Sigma_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^4}$$

d'où

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\Sigma_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n} \tag{3.3.6}$$

3.4 Le critère d'information d'Akaike corrigé

Précédemment les paramètres p, q sont supposées connues mais réellement on ne connait pas leur vraie valeurs, donc il est bien évident souhaitable de trouver des valeurs proches $\widehat{p}, \widehat{q}$ afin de définir le modèle optimal pour la représentation de processus généré, pour cela plusieurs critères on été suggérés parmi les critères proposés le plus performant est le critère d'information d'Akaike corrigé (AICC), dans ce critère Hurvich et Tsai ont proposé une nouvelle statistique définie par :

$$-2lnL\left(\widehat{\phi}, \widehat{\theta}, \widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\right) + 2n\frac{p+q+1}{n-p-q-2} \tag{3.4.1}$$

où $\widehat{p}, \widehat{q}$ sont les deux valeurs de p, q qui minimise la AICC.

3.5 Exercices

Exercice 3.1 *: Etude d'un Processus* $MA(1)$ *Soit le processus MA(1) suivant, où* ε_t *est un bruit blanc de variance notée* σ_ε^2

$$X_t = (1 + 0.7B)\varepsilon_t$$

1. *Calculer l'espérance et la variance du processus* X_t*. Le processus est-il stationnaire ?*
2. *Le processus est-il inversible ?*
3. *Calculer* γ_X *la fonction d'autocovariance de* X_t *et en déduire la fonction d'autocorrélation totale.*
4. *En utilisant les équations de Yule-Walker, donner l'expression de la fonction d'autocorrélation partielle.*

Exercice 3.2 *Soit un processus stochastique* X_t *satisfaisant à la relation suivante, avec* ε_t *un bruit blanc :*

$$X_t = 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Une information supplémentaire vous est donnée, à savoir qu'il s'agit d'un processus MA(1), soit :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

1. *Calculer* θ*.*

2. *Les valeurs de θ trouvées sont-elles toutes admissibles ? sinon pourquoi ?*

3. *Calculer ϕ_{22}, ϕ_{33} et représenter la fonction d'autocorrélation partielle pour $k = 0, 1, 2, 3$.*

Exercice 3.3 *(Stationnarité et inversibilité)*

1. *Etudiez la stationnarité et l'inversibilité des deux processus suivants :*
   — $X_t = (1 - B)Y_t avec Y_t = at + b + \varepsilon_t$

   — $X_t = (1 - B)^2 Y_t$ *avec* $Y_t = at^2 + bt + c + \varepsilon_t$

   ε_t *est un bruit blanc de variance notée* σ^2_ε.

2. *Identifier les deux processus.*

Exercice 3.4 *Soient les processus suivants en Y, X, V et Z , avec ε_t le bruit blanc :*

1. $Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.35Y_{t-2} + \varepsilon_t$

2. $X_t = 0.7X_{t-1} + 0.35X_{t-2} + \varepsilon_t$

3. $V_t = V_{t-1} + 2V_{t-2} + \varepsilon_t$

4. $Z_t = 0.1Y_t + 0.05V_{t-1} + \varepsilon_t$

Ces quatre processus sont-ils stationnaires ? Quel est leur ordre d'intégration ?

Exercice 3.5 *Soit ε_t un bruit blanc et X_t le ARMA(1,1) vérifiant*

$$X_t - 2X_{t-1} = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$$

1. *Quelle est la relation ARMA entre X_t et son bruit blanc d'innovation ε_t ?.*
2. *Exprimer X_t en fonction des valeurs passées de ε_t.*
3. *Exprimer ε_t en fonction des valeurs passées de X_t.*

Exercice 3.6 1. *Donner l'ordre des différents processus MA suivants et précisez s'ils sont stationnaires ou non (justifier la réponse à la dernière question). Le processus ε_t est un bruit blanc et B est l'opérateur de retard*

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - 0.3B)\varepsilon_t \\ X_t &= (1 - 0.4B + 1.2Br)\varepsilon_t \\ X_t &= \Sigma_{i=1}^{\infty}(0.7B)^i\varepsilon_t \\ X_t &= \Sigma_{i=1}^{\infty}(1.3B)^i\varepsilon_t \end{aligned}$$

2. *En déduire une conclusion générale quant à la stationnarité des processus MA.*
3. *Expliquer pourquoi l'hypothèse d'inversibilité est souvent requise dans*

l'étude des processus linéaires stochastiques.

4. *Identifier parmi les quatre processus précédents, ceux pour lesquels, la vérification de cette hypothèse n'a pas de sens. Pour les autres, préciser s'ils sont inversibles ou non.*

Exercice 3.7 *Soit le processus AR(p) suivant, supposé stationnaire, avec ε_t un bruit blanc de variance σ_ε^2 :*

$$X_t = \Sigma_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i}$$

1. *Donner la formule de $\gamma_X(k)$, l'autocovariance d'ordre k. En déduire celle de l'autocorrélation totale $\rho_X(k)$.*
2. *Vérifier si les deux processus suivants sont stationnaires. Utiliser les résultats de la question 1 et calculer les autocorrélations totales d'ordre 1, 2, et 3 pour ces processus :*

$$\begin{aligned} X_t &= 0.7X_{t-1} + 0.49X_{t-1} + \varepsilon_t \\ X_t &= 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

3. *Calculer pour ces deux processus, la fonction d'autocorrélation partielle.*