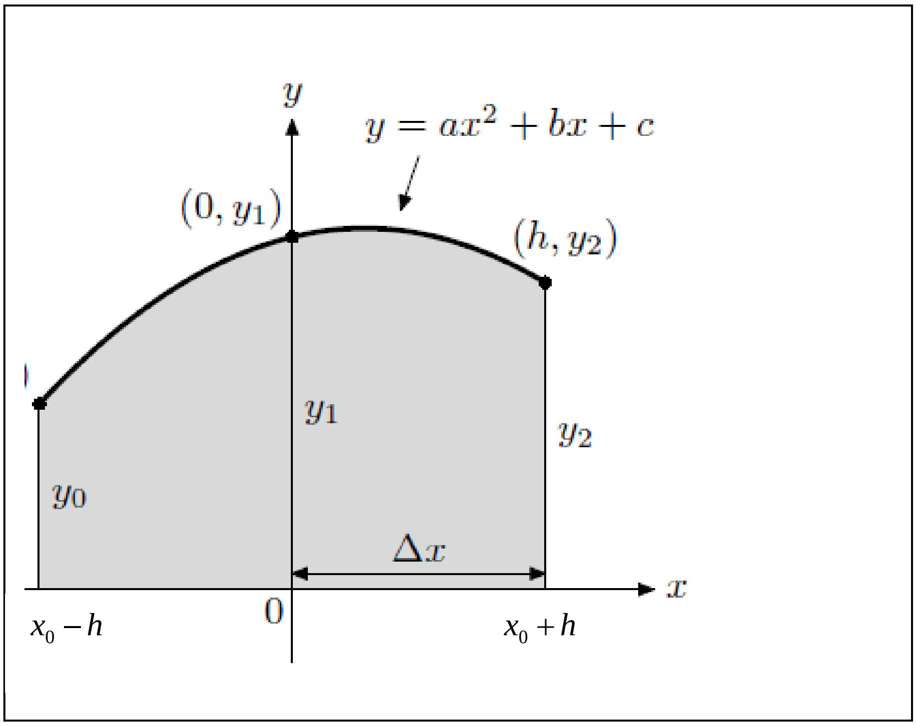
Méthodes d'intégrations : Méthode de SIMPSON

1. Rappel

La méthode de Simpson d'intégration numérique consiste à approcher, sur un intervalle I = [a,b], une fonction f par un polynôme de degré 2 prenant les mêmes valeurs que f aux points d'abscisses a, b et $c = \frac{(a+b)}{2}$

Le polynôme qui remplace la fonction sur l'intervalle I est donné par $y = ax^2 + bx + c$



Donc, l'intégral de f est représenté par l'intégral de $y = ax^2 + bx + c$.

$$I = \int_{x_0-h}^{x+h} (ax^2 + bx + c)dx = \int_{x_0-h}^{x_0} (ax^2 + bx + c)dx + \int_{x_0}^{x_0+h} (ax^2 + bx + c)dx$$

$$I=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{x_0-h}^{x_0}+\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{x_0}^{x_0+h}$$

$$I=-\frac{a}{3}(x-h)^3+\frac{b}{2}(x-h)^2+c(x-h)+\frac{a}{3}(x+h)^3+\frac{b}{2}(x+h)^2+c(x+h)$$

$$I=\frac{h}{3}\left[ax_0^2+6bx_0+2h^2+6c\right]\text{……………………………….(1)}$$

De l'autre côté, puisque la fonction f se coïncide avec le polynôme dans ces trois points on trouve,

$$f(x_0-h)+4f(x_0)+f(x_0+h)=a(x_0-h)^2+b(x_0-h)+c+4ax_0^2+4bx_0+4c+a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c$$
$$=\left[ax_0^2+6bx_0+2h^2+6c\right]\text{………………………..(2)}$$

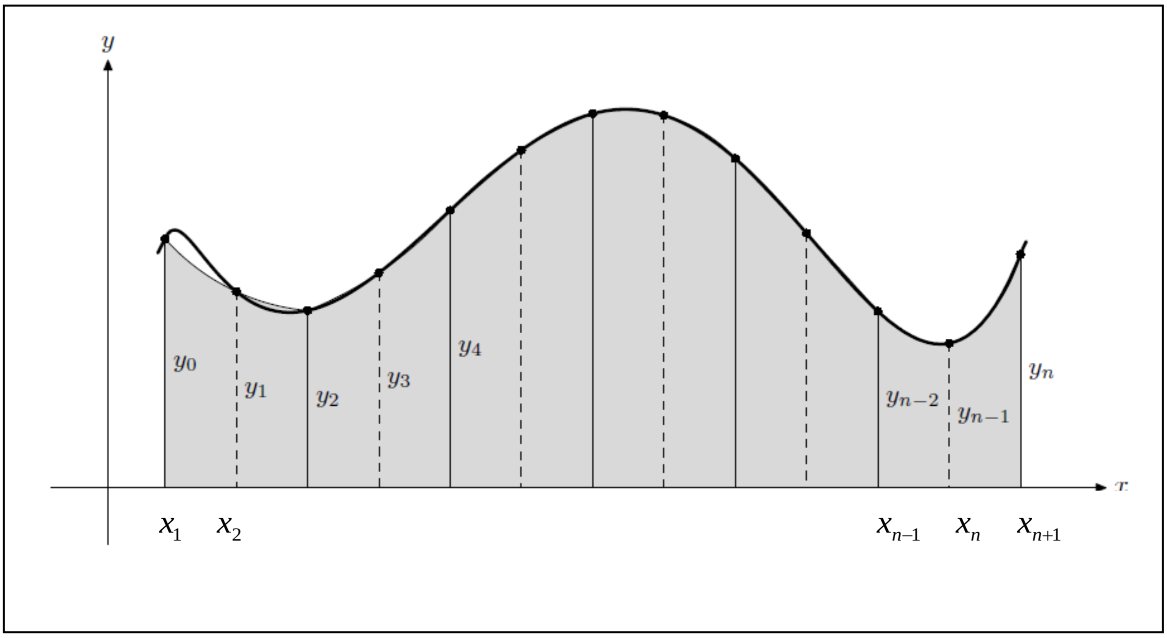
Des formules 1 et 2 , on peut écrire

$$I=\frac{h}{3}\left[f(x_0-h)+4f(x_0)+f(x_0+h)\right]$$

Si on devise l'intervalle [a,b] sur un nombre n (n doit être paire), donc

$$h = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

$n+1: \quad point$



De la même façon précédente, on peut estimer l'intégral par la somme des aires des polynômes définis sur les intervalles $[x_1 \quad x_3], [x_3 \quad x_5], \quad [x_5 \quad x_7]..[x_{n-1} \quad x_{n+1}]$ par :

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right] + \left[f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)\right] + \ldots\left[f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})\right]$$

par simplification on trouve la formule de Simpson,

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5) \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

2- Algorithme :

On trouve tous les valeurs de f dans les abscisses xi (on les met dans un vecteur), ensuite on fait la somme des : $\left\{\begin{matrix} f(x(1)) \\ 4f(x(paires) \\ 2f(x(impaires)) \\ f(x(n+1)) \end{matrix}\right\}$

3- programme

```
%methode Simpson

clc;
clear all;
a=1;
b=4;
n=6; % n doit être paire

h=abs(b-a)/n;
x=[a:h:b];
for i=1:length(x)
   f(i)=sqrt(1+x(i)^3)
end
 Isi =h/3*(f(1)+4*sum(f(2:2:n))+2*sum(f(3:2:n))+f(n+1))
```

Remarque : **si vous voulez faire des exemples sur la somme des éléments des vecteurs avant de faire le programme**