

**Exercice 1 (10 points).**

L'indice mensuel des prix à la consommation depuis Janvier 2009 pour les mois de Janvier et de Juillet est indiqué dans le tableau ci-dessous.

mois	indice
Janv 2009	117.13
Juil 2009	117.80
Janv 2010	118.32
Juil 2010	119.68
Janv 2011	120.32
Juil 2011	121.94
Janv 2012	123.06
Juil 2012	124.22

- 1) Trouver la fonction de régression linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés, qui associe à chaque période de six mois l'indice des prix à la consommation correspondant.
- 2) Utilisant cette fonction de régression, prédire l'indice des prix à la consommation pour le mois de Juillet 2013.
- 3) Déterminer (en utilisant la droite de régression) quand l'indice des prix à la consommation a-t-il été inférieur à 100.

**Solution**

- 1) Régression linéaire obtenue à l'aide la méthode des moindres carrés

Soit la codification suivante pour la variable d'entrée  $x$

mois	La variable $x$
Janv 2009	1
Juil 2009	2
Janv 2010	3
Juil 2010	4
Janv 2011	5
Juil 2011	6
Janv 2012	7
Juil 2012	8

Donc on aura

$$x = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8];$$

et l'étiquette  $y$

$$y = [117.13; 117.80; 118.32; 119.68; 120.32; 121.94; 123.06; 124.22];$$

### Application du modèle de régression linéaire :

Dans le modèle de la régression linéaire, l'ensemble des paramètres est calculé par la formule suivante :

$$\tilde{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Application numérique sur les données de l'exercice :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 117.13 \\ 117.80 \\ 118.32 \\ 119.68 \\ 120.32 \\ 121.94 \\ 123.06 \\ 124.22 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204 & 36 \\ 36 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 117.13 \\ 117.80 \\ 118.32 \\ 119.68 \\ 120.32 \\ 121.94 \\ 123.06 \\ 124.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4374.8 \\ 962.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{On a } \det(X^T X) = 336, \text{ donc } (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 8/336 & -36/336 \\ -36/336 & 204/336 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0238 & -0.1071 \\ -0.1071 & 0.6071 \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où } \tilde{w} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} 1.0408 \\ 115.6250 \end{bmatrix}$$

$$y = 115.6250 + 1.0408x$$

2) Prédire l'indice des prix à la consommation pour le mois de Juillet 2013 :

Pour Juillet 2013, on a

$$x = 10$$

Donc, le modèle de régression de la question 1) donnera

$$y = 115.6250 + 1.0408 * 10 = 126.0330$$

3) L'indice des prix à la consommation est inférieur à 100 si on a :

$$y < 100$$

$$\Rightarrow 115.6250 + 1.0408x < 100$$

$$\Rightarrow x < \frac{100 - 115.6250}{1.0408}$$

$$\Rightarrow x \leq -16$$

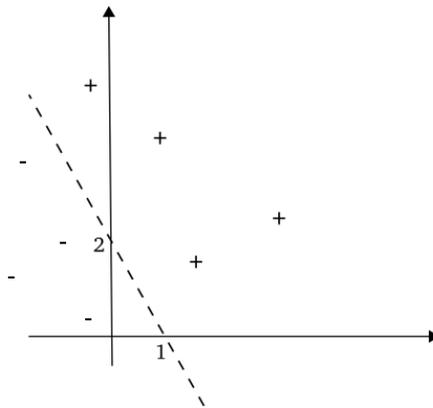
**Ce qui correspond à Juillet 2000**

## Exercice 2 (10 points).

Soit un perceptron dont le vecteur de pondération  $(w_0, w_1, w_2) = (2, 1, 1)$  et supposons que le perceptron utilise en sortie la fonction d'activation

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

- 1) Tracer sur un diagramme le séparateur linéaire obtenu par ce perceptron et hachurer la surface correspondante à la partie du plan où le perceptron retourne la valeur 1.
- 2) Lesquels parmi les perceptrons caractérisés par les vecteurs de pondération suivants ont le même hyperplan et qui retourne exactement le même résultat de classification que le perceptron donné dans 1. ?
  - a)  $(w_0, w_1, w_2) = (1, 0.5, 0.5)$
  - b)  $(w_0, w_1, w_2) = (200, 100, 100)$
  - c)  $(w_0, w_1, w_2) = (\sqrt{2}, \sqrt{1}, \sqrt{1})$
  - d)  $(w_0, w_1, w_2) = (-2, -1, -1)$
- 3) Quelles sont les valeurs des poids  $w_0$ ,  $w_1$  et  $w_2$  du perceptron dont la frontière de décision est illustrée ci-dessous ? Y a-t-il plusieurs choix possibles pour ces valeurs de poids ? Si les étiquettes de classification (+ ou -) sont inversées, les poids resteront-ils les mêmes ?



## Solution

- 1) Le diagramme du séparateur linéaire et la surface correspondante à la partie du plan où le perceptron retourne la valeur 1.

$$y = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

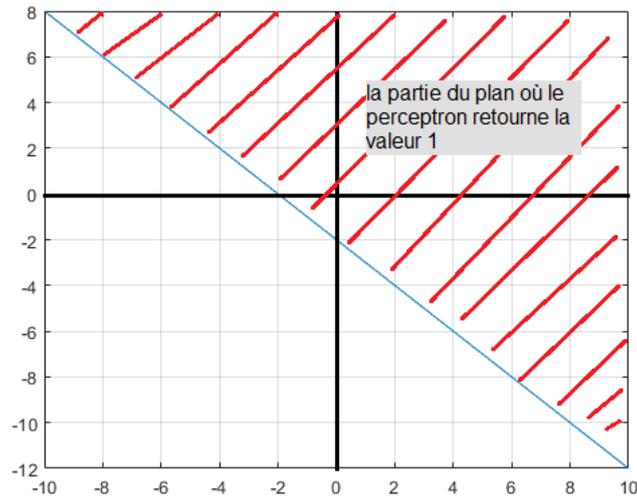
Avec  $(w_0, w_1, w_2) = (2, 1, 1)$  on aura

$$y = 2 + x_1 + x_2$$

Mettant  $y \geq 0$ , on aura

$$2 + x_1 + x_2 \geq 0$$

Donc le diagramme sera comme suit

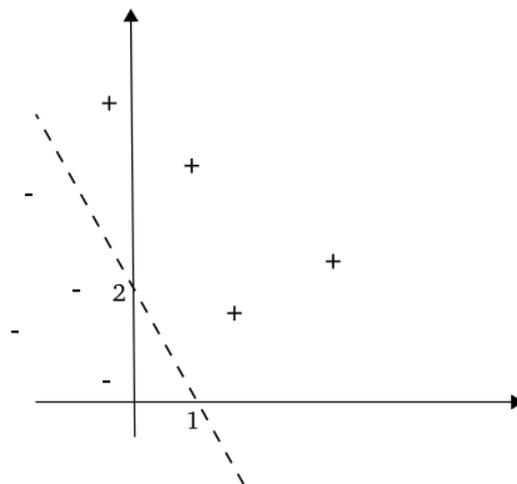


2) Les perceptrons qui ont le même hyperplan et qui retournent exactement le même résultat de classification que le perceptron donné dans 1) sont :

a)  $(w_0, w_1, w_2) = (1, 0.5, 0.5)$

b)  $(w_0, w_1, w_2) = (200, 100, 100)$

3) Les valeurs des poids  $w_0$ ,  $w_1$  et  $w_2$  du perceptron dont la frontière de décision est illustrée ci-dessous sont :



On pourra déduire les valeurs des paramètres du perceptron comme suit :

D'après le diagramme ci-dessus, on a les deux équations suivantes

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 0 \\ w_0 + 2w_2 = 0 \end{cases}$$

D'où, on aura les valeurs des paramètres du perceptron

$$(w_0, w_1, w_2) = (a, -a, -a/2).$$

En variant le paramètre  $a$ , il peut y avoir plusieurs valeurs possibles pour ces poids.

On pourra déduire aussi, que même si on inverse les étiquettes de classification (+ ou -), les poids resteront les mêmes.