المحور الثالث: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

مقـدمة

يهتم هذا **المحور** بدراسة المتغيرات العشوائية، من حيث التعريف، والأنواع، وتوزيعاتها الاحتمالية، وخصائص هذه التوزيعات.

المتغير العشوائي:

في أغلب التجارب العشوائية يمكن التعبير عن نتائج أي التجربة بقيمة عددية، والمفهوم الرياضي الذي يعبر عن معنى هذه القيمة يطلق عليه المتغير العشوائي **random variable**.

مثال:

- عند رمي قطعة نقود مرتين: يمكن التعبير عن نتائج هذه التجربة بقيمة عددية، فيكون المتغير العشوائي مثلا هو عدد مرات ظهور الصورة ويأخذ بذلك القيم: 0، 1، 2.
- في تجربة إلقاء نرد: يمكن التعبير عن نتائج هذه التجربة بقيمة عددية، فالمتغير العشوائي X يمكن أن يكون:
  - ✓ الرقم الموجود على الوجه الظاهر ويأخذ القيم: 1، 2، 3، 4، 5، 6.
  - ✓ ضعف الرقم الموجود على الوجه الظاهر ويأخذ القيم: **2** (2x1)، **4** (2x2)، **6**(2x3)، **8**(2x4)، **10**(2x5)، **12**(2x6).
  - ✓ نصف الرقم الموجود على الوجه الظاهر ويأخذ القيم: **0,5** (2/1)، **1** (2/2)، **1,5** (2/3)، **2**(2/4)، **2,5** (2/5)، **3**(2/6).

المتغير العشوائي هو المتغير الذي يتم الحصول على قيمته نتيجة لتجربة عشوائية ما.

فهو يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين.

ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة **X ,Z,Y ...** ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة **x ,y ,z ,...**.

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة **Discrete Random Variables**

2- المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) **Continuous Random Variables**

1-المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة):

المتغير العشوائي المنفصل هو المتغير الذي يأخذ قيم قابلة للعد سواء كانت منتهية أو غير منتهية، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد ***X***، $X:\{x=0, 1, 2, 3, 4\}$.

2- عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل *10* **دقائق** ***Y***، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.

3- عدد الأهداف المسجلة خلال بطولة كأس إفريقيا.

4- عدد السيارات المباعة لشركة ما خلال السنة.

5- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

6- عدد حالات كورونا في بلد ما في اليوم.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

لكل قيمة x_i من قيم المتغير العشوائي **X** المنفصل قيمة احتمالية مرافقة $P(X = x_i)$.

مثال 1: إذا رمينا قطعتين نقديتين و نكتب X متغير عشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة، تكون النتائج كالتالي:

فضاء العينة	**(HH)**	**(HT) (TH)**	**(TT)**	**S**
قيم المتغير العشوائي	**2**	**1**	**0**	**X**
الاحتمال	**1/4**	**2/4**	**1/4**	**P(X = x)**

يمكن كتابة **P(X = x)** بالشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 1/4 & x = 0 ، 2 \\ 2/4 & x = 1 \\ 0 & \text{for all} \end{cases}$$

التوزيع الاحتمالي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ الإمكانات، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

التوزيع الاحتمالي لمجموعة القيم المتقطعة التي يأخذها متغير عشوائي متقطع هو الجدول أو القائمة التي تتضمن جميع القيم الممكنة مع احتمال الخاص بكل منها.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم، $X:\{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، وكان $P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X = x_i) = f(x_i)$ ، أي أن:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

X	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
P(x)	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	$P(x_4)$	**…**	$P(x_n)$

مثال 2: إذا رمينا زهرتي نرد فما هي النتائج المحتملة لمجموع الوجهين و ما هي احتمالاتها؟

النتائج ستكون كالآتي:

X	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(X = x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الاحتمال، أو دالة الكثافة:

و يجب أن يتوفر في هذه الدالة الشرطان الآتيان **:**

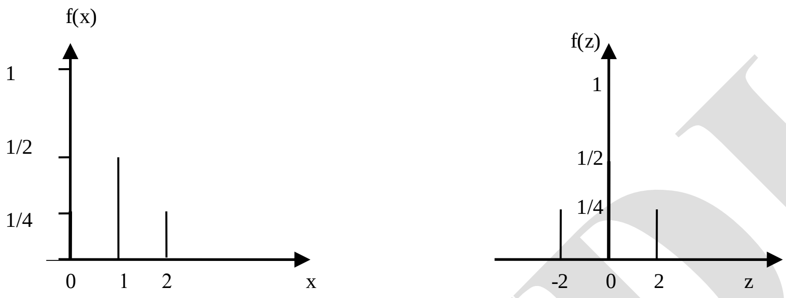
1) $\forall i \quad 0 < f(x_i) < 1$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \qquad (2$$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ل م ع المتقطعة

تمثل المتغيرة العشوائية المتقطعة ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور **X**.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل **X** و**Z** المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



رسم **1** التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع **F(x)** للمتغيرة العشوائية المتقطعة

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" – كما يلي:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية **f(x)** كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

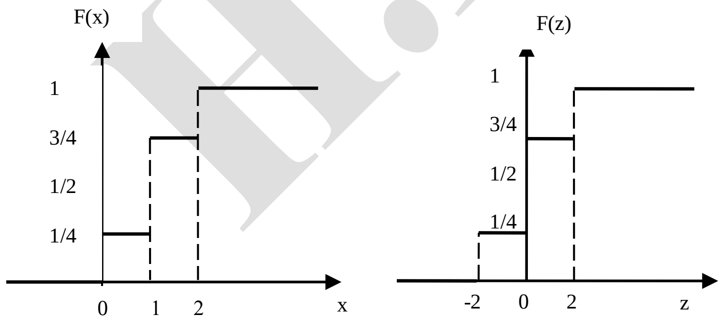
إذا كانت **X** تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن **F(x)** يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد قيم **F(x)** و**F(z)** للأمثلة السابقة ومثلهما بيانيا.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1



رسم 2 التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

ملاحظة. تأخذ دالة التوزيع للم ع المتقطعة شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

2-المتغيرات العشوائية المستمرة

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المجال ***(a,b)***، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغير $\boldsymbol{X}$ عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى ***(a,b)***، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المنزرعة بالأعلاف في المملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من ***(30-40)***، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

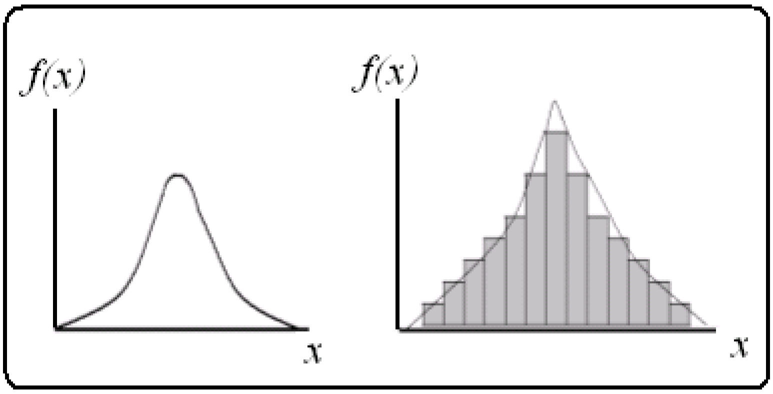
وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.

التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر

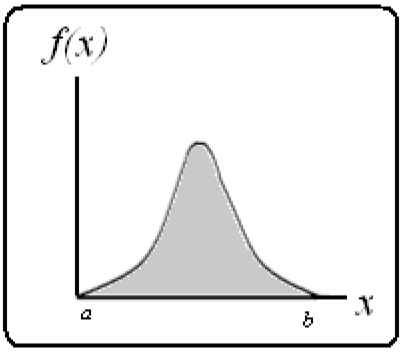
عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (8-1)

شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر



والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة ***f(x)*** بدالة كثافة الاحتمال **Probability Distribution Function*(p.d.f)*** ، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

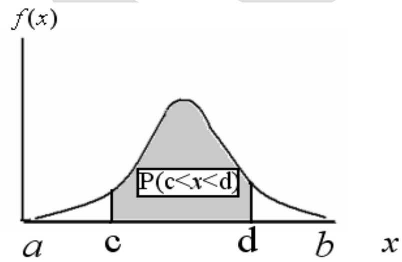
1- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x) \succ 0$ ، $x \in (a,b)$

2- التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح ، أي أن:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1}$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x=a$ حتى $x=b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b).

3- لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c<x<d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$\boxed{p(c<x<d) = \int_{x=c}^{x=d} f(x)\ dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c)}$$

4- في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x = value)$ مساويا للصفر، أي أن:

$$\boxed{p(x = value) = 0} \qquad (١١-٨)$$

مثال: أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 & 0<x<3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{3} Cx^2dx+\int_{3}^{+\infty} 0dx=1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9C=1 => C=1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون $C = 1/9$.

$$P(1<x\le 2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (1/9)x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right]=\frac{7}{27}$$

$$P(1>x>2)=1-P(1<x<2)=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$$

مثال (8-5)

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} cx(10-x) \;,\; 0<x<10 \\ 0 \;\; otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حساب قيمة الثابت c

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين **8**و**5** ألف ريال خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا **600** أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن **3** آلاف خلال الشهر؟

الحـل

1- حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx=1$$

إذا

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\ dx=c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\ dx=c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$=c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$=\frac{500}{3}c=1$$

$$c=3/500=0.006$$

2- حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين **8**و **5** ألف ريال خلا الشهر هو.

$$p(5<x<8)=\int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x)\ dx=0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$=0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right]=0.006[(149.3333)-(83.3333)]$$

$$=0.006(66)=0.396$$

3- إذا كان لدينا **600** أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن **3** آلاف خلال الشهر هو:

$$number\ of\ \ family = 600\ \ p(x<3)$$

$$= 600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9]-0 = 129.6 \approx 130$$

حوالي **130** أسرة.

2/5/8 المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x ، $a<x<b$ فإن التوقع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{E(h(x)) = \int_a^b h(x)\ dx}$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = E(x) = \int_a^b xf(x)dx \\ \sigma^2 = E(x^2) - u^2\ ,\ E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx \end{array}}$$

تابع مثال (5-8)

في المثال السابق أوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري.

الحـل

1- المتوسط الحسابي

$$\mu = E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x\big(0.006x(10-x)\big) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري **5** آلاف ريال.

2- الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10} (10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$ ، ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\text{var}\,iance} = \sqrt{5} = 2.236$$

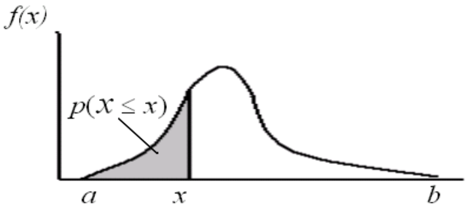
3

دالة التوزيع

يرمز لهذه الدالة بالرمز ***F(x)*** وتحسب بإيجاد الاحتمال:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx$$

ويمكن توضيحها بيانيا بالرسم التالي:



تابع مثال (5-8)

في المثال (5-8) أوجد دالة التوزيع ، ثم استخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن **5** آلاف جنيه.

الحل

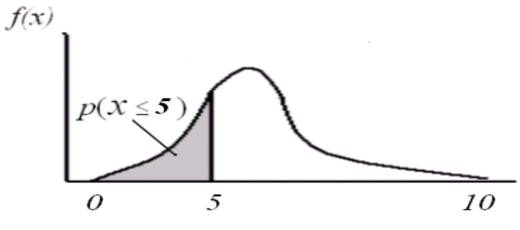
- إيجاد دالة التوزيع

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ dx$$

$$= \int_0^x 0.006x(10 - x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- حساب الاحتمال المطلوب $F(5) = p(x \le 5)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:



ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x = 5$ في الدالة ***F(x)*** التي تم التوصل إليها، أي أن:

$$\begin{aligned}
F(5) &= P(x \le 5) = \\
&= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right] \\
&= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5
\end{aligned}$$

أي أن **50%** من الأسر يقل إنفاقها عن **5** آلاف ريال.

خصائص دالة التوزيع

1- $F(x) \succ 0$	2- $F(a) = 0$	3- $F(b) = 1$	4- $p(X \succ x) = 1 - F(x)$	5- $f(x) = dF(x)/dx$