ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

المحور الثاني: الاحتمالات Probability

تكتسي نظرية الاحتمالات أهمية كبيرة في العلوم البيولوجية والفيزيائية والإدارة والاقتصاد والهندسة وبحوث العمليات وغيرها من العلوم، فهي تساعد في النمذجة وصنع القرار.

وقد بدأت نظرية الاحتمال تطورها في عصر النهضة في أوروبا عندما بدأ علماء الرياضيات مثل باسكال (Pascal) وفيرمات (Fermat) الاهتمام بفهم ألعاب الحظ، وتم تطوير الكثير من المفاهيم عن طريق التساؤل عما يحدث في المباريات التي تلعب بواسطة رمي عملة عادلة أو حجر نرد أو مجموعة أوراق (52 ورقة). وظلت النظرية مرتبطة بالمقامرة والعديد من الأمثلة التي يمكن الوصول إليها لا تزال تأتي من هذا النشاط.

والحقيقة أن معظم الناس لديهم بعض الأفكار المختلفة حول ما يعنيه الاحتمال، لأن لكلمة probability مرادفات مثل الصدفة، الفرصة، عدم اليقين، المخاطرة، التوقعات، إلخ.

أولا مفاهيم في نظرية الاحتمالات:

(أ) **التجربة Experiment**: هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس، وقد تقبل نتيجتين أو أكثر، ولفهم للتجربة وتمييزها عن الحدث يمكن القول أن التجربة هي المولد أو السبب في حدوث النتيجة.

(1) **التجربة النظامية**: هي تجربة يمكن أن نعرف نتائجها مسبقا من خلال القوانين أو المسلمات الخاصة بها كما في علوم الفيزياء والكيمياء.

(2) **التجربة العشوائية Random Experiment**: أساس نظرية الاحتمالات هو التجربة العشوائية وهي تجربة لا يمكن تحديد نتائجها مسبقاً، رغم معرفتها، أي على الرغم من أننا لا نستطيع التنبؤ بنتائج التجربة العشوائية بشكل مؤكد، إلا أنه يمكننا عادة تحديد مجموعة من النتائج المحتملة، ومن أمثلة التجربة العشوائية:

- ✓ رمي حجر نرد.
- ✓ قياس كمية الأمطار في بميلة في جانفي.
- ✓ عد عدد المكالمات الواردة إلى هاتف خلال فترة زمنية محددة.
- ✓ اختيار عينة عشوائية من خمسين شخصا وملاحظة عدد من يكتب بيده اليسار.
- ✓ اختيار عشوائيا لعشرة أشخاص وقياس طولهم.
- ✓ التجربة العشوائية الأكثر جوهرية هي التجربة رمي عملة معدنية عدة مرات، وفي الواقع تستند الكثير من نظرية الاحتمالات على هذه التجربة البسيطة، كما سنرى لاحقا.

توضيح: في تجربة لها نتائج عشوائية، تسمى جميع النتائج الممكنة فضاء (فراغ) العينة، وإذا كانت النتائج المحتملة قابلة للعد (منتهية)، فيمكن سردها، مثل: ω1، ω2، . . . ومن ثم يكون فضاء العينة هو: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ وكل نتيجة (نقطة) معينة ω تنتمي إلى **Ω** هي **ملاحظة أو قياس**.

مثال1: تجربة رمي قطعتي نرد لها النتائج التالية:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}.$$

مثال2: تجربة قياس عمر آلة (بالأيام) لها النتائج التالية:

$$\Omega = R+ = \{\text{ positive real numbers }\}$$ **أعداد حقيقية موجبة.**

مثال3: تجربة عد عدد المكالمات الواردة إلى هاتف خلال فترة زمنية محددة لها النتائج التالية:

$$\Omega = N = \{\text{ Natural Number}\}$$ **عدد طبيعي.**

مثال4: تجربة رمي قطعة (عملة) معدنية 3 مرات، نقوم بتسجيل النتائج (عدد الصور والأرقام)، يمكن كتابة فضاء العينة كما يلي:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\},$$

إن فضاء العينة ليس دائما قابل للعد، بل قد يكون غير قابل للعد (غير منته) مثل رمي قطعة نقد لمرات متتالية غير منتهية.

H.DAOUDI

ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

(ب) الحدث: المجموعة الجزئية A من فضاء العينة Ω تسمى **حدث،** (أي أن التجربة تتفرع بالضرورة إلى أحداث).

ليس شرطا أن يكون زمن وقوع الحدث هو المستقبل، فقد يكون الماضي أو الحاضر.

في كثير من الأحيان لا نكون مهتمين بحدوث نتيجة واحدة بل بحدوث مجموعة من النتائج، تسمى هذه المجموعات الفرعية من فضاء العينة بالأحداث.

نقول أن الحدث A قد وقع إذاكانت نتيجة التجربة هي أحد العناصر في المجموعة الجزئية A.

- $A \cup B$ هو حدث وقوع: إماA أو B أو كلاهما.
- $A \cap B$ هو حدث وقوع: A وB في وقت واحد (معا).

أمثلة على الأحداث هي:

- ✓ حدث كون مجموع الأرقام في رمي قطعتي نرد هو 10 أو أكثر: $A = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
- ✓ حدث ظهور صورتين في رمي قطعتي نقد: $A = \{(F,F)\}$

تنبيه: يجب أن تكون على دراية بالأدوات الأساسية لألعاب المقامرة: عملة معدنية، حجر نرد (ستة جوانب)، ومجموعة أوراق 52.

رمي قطعة نقدية (عملة) عادية هي تجربة تعطيك نتيجتين صورة أو رقم { Heads(H) أو Tails(T) } باحتمال متساوي، كما أن رمي حجر نرد غير مغشوشة هي تجربة تنتج ستة نتائج 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 باحتمال متساوي.

(1) الحدث البسيط: الحدث الذي يحتوي على عنصر (نقطة) واحد من Ω يسمى عادة حدث بسيط، فهو حدث مكون من عنصر واحد ولا يمكن تفكيكه إلى حوادث جزئية بسيطة. مثال:$A = \{1\}$ في تجربة إلقاء حجر نرد هو حدث بسيط.

(2) الحدث المركب: الحدث الذي يحتوي على عدة عناصر (نقاط) من Ω يسمى عادة حدث مركب، أي يمكن تفكيكه إلى حوادث جزئية بسيطة.

مثال: حدث العدد زوجي في تجربة إلقاء حجر نرد$B = \{2، 4، 6\}$ هو حدث مركب.

(3) الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يحوي أي عنصر من فضاء العينة (فراغ الإمكانيات)، وهو الحادث الذي لا يمكن حدوثه مطلقا.

مثال: حدث ظهور العدد 7 في تجربة إلقاء حجر النرد$C = \{7\}$ هو حدث مستحيل.

(4) الحدث الأكيد: هو الحدث الذي يضم جميع عناصر فضاء العينة (فراغ الإمكانيات)، وهو الحدث الذي يكون تحققه أكيد.

مثال: حادث ظهور عدد أقل من 7 في تجربة إلقاء حجر النرد $D = \{1,2,3,4,5,6\}$ هو حدث أكيد.

(5) الحوادث المنتظمة : هي الحوادث التي تتساوى احتمالات وقوع جميع نتائجها.

مثال: في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة يكون لكل رقم نفس الفرصة للظهور.

(6) الحوادث المستقلة independent events: يقال أن الحدثان A وB مستقلان عن بعضهما البعض، اذاكان احتمال وقوع أحد الحدثين لا يؤثر بأي حال على احتمال وقوع الحدث الآخر. مثال على حدثين مستقلين: رمي قطعة نقد وحجر نرد معا.

مثال1: عند رمي زهرتي نرد عادلة (غير مغشوشة fair dice)، بافتراض أن A و(B) هو الحدث الذي يظهر فيه القالب الأول (الثاني) رقمًا فرديًا على التوالي، والحدث C يكون مجموع الرقمين مفرد. هل A وB مستقلان؟ هل A وC مستقلان؟

(7) الحوادث غير المستقلة: يقال أن الحدثان A وB غير مستقلين عن بعضهما البعض، اذاكان احتمال وقوع أحد الحدثين يؤثر على احتمال وقوع الحدث الآخر. مثال السحب المتتالي دون إرجاع.

(8) الحوادث المتنافية: يقال أن الحدثان A وB حادثان متنافيان أذاكان لا يمكن أن يحدثا معا في آن واحد.

- ✓ مثل ظهور صورة ورقم في رمي قطعة معدنية مرة واحدة.

إعداد الأستاذ: داودي حمزة

H.DAOUDI

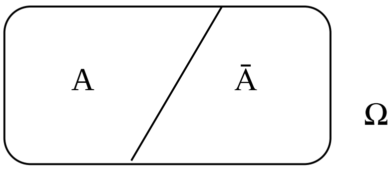
ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

- ✓ مثل ظهور رقم زوجي ورقم فردي في رمي قطعة نرد مرة واحدة.
- ✓ مثل ظهور رقم مضاعف لخمسة ورقم مضاعف لأربعة في رمي قطعة نرد مرة واحدة.
- ✓ مثل ظهور 3 رجال و3 نساء في لجنة مكونة من 5 أشخاص.

9) الحوادث غير المتنافية: إذا كان A وB حادثان غير متنافيين فيمكن أن يحدثا معا في آن.

- ✓ مثل ظهور صورة ورقم في رمي قطعة معدنية مرتين.
- ✓ مثل ظهور رقم زوجي ورقم فردي في رمي قطعة نرد مرتين.
- ✓ مثل ظهور رقم مضاعف لخمسة ورقم مضاعف لأربعة في رمي قطعة مرتين.
- ✓ مثل ظهور 3 رجال و3 نساء في لجنة مكونة من 6 أشخاص.

10) الحدث المكمل (المتمم) complementary event:



الحدث المكمل (المتمم ويسمى أيضا المعاكس) للحدث A هو حدث [عدم وقوع A]، وهو مجموع الحوادث التي تنتمي لفراغ الإمكانيات وتختلف عن الحدث A ، أي الحدث الذي لا يقع فيه عناصر المجموعة A، ويُشار إليه عادة بالرمز $\bar{A}$ أو A^c أو A'، ولا يوجد سوى حدث متمم واحد ، بحيث يكون كل من "A" و"$\bar{A}$" مكملان لبعضهما.

الاحتمال الكلاسيكي classical probability:

يعرف أيضاً بالاحتمال النظري، وينطبق الاحتمال الكلاسيكي على المواقف التي لا يوجد فيها سوى عدد محدود(منته) من النتائج المحتملة والتي لها فرص متساوية.

على سبيل المثال تجربة رمي قطعة نقد غير مغشوشة (عادلة) أو رمي قطعة نرد، أو اختيار ورقة لعب (بطاقة) من مجموعة أوراق عادية ومخلوطة جيدا.

لتكن A المجموعة الجزئية (**حدث**) من فضاء العينة Ω، **وكما قلنا فإن** فضاء العينة Ω في الاحتمال الكلاسيكي به عدد محدود من النتائج المحتملة التي لها فرص متساوية $\Omega = \{\boldsymbol{\omega_1,\ldots,\omega_N}\}$ ، وعليه نرمز لاحتمال وقوع (تحقق) الحدث A بالرمز $P(A)$ ، ويمكن حسابه من خلال:

$$P(A) = \frac{\text{number of outcomes in A}}{\text{number of outcomes in }\Omega} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{M}{N} \quad \frac{\text{عدد نتائج A}}{\text{عدد نتائج }\Omega}$$

فالاحتمال إذن هو نسبة عدد نتائج (Mعدد عناصر) المجموعة الجزئية A التي نهتم بها والتي تسمى (الحالات الملائمة) إلى عدد نتائج (Nعدد عناصر) المجموعة الكلية (فضاء العينة) Ω والتي تسمى (الحالات الكلية أو الممكنة) أي أن الاحتمال = $\frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الكلية}}$

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.
- الاحتمال محصورا بين 0 و1 أي لا يمكن أن يكون سالبا ولا يمكن أن يكون أكبر من الواحد.
- حدث المجموعة Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل $P(\Omega) = 1$.
- احتمال وقوع الحدثA يساوي 1 ناقص احتمال الحدث المتمم (المعاكس) $\bar{A}$، أي أن مجموع احتمال الحدثA واحتمال الحدث المتمم يساوي واحد. $\mathbf{P(A) + P(\bar{A}) = 1}$

مثال1: الحدث المكمل لحدث الحصول على الرقم 6 عند رمي حجر نرد هو أن نحصل على نتيجة خلاف الرقم 6 في النرد (أي نحصل على 1 ، 2 ، 3 ، 4 أو 5). $\mathbf{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}}$

مثال 2: لنفترض أنك رميت خمس عملات معدنية، ما هو احتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل؟

فضاء العينة ، Ω ، هو جميع النتائج المحتملة للرميات الخمسة، بما أن هناك 5 رميات مستقلة، لكل منها نتيجتين محتملتين ، فلدينا:

H.DAOUDI

ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

$$|\Omega| = 2^5 = 32$$

2. A= { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

3. $\overline{A}$= {عدم الحصول على أي صورة}

4. $\overline{A}$= {(P, P, P, P, P)}

5. $$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{32}{32} - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

سؤال: في عائلة لديها 4 أطفال، ما هو احتمال أن يكون فيها ولدان وبنتان (2: 2) ؟

أحد الإجابات الخاطئة الشائعة: 5/1 ، حيث أن الاحتمالات الخمسة لعدد الأولاد غير متساوية.

هناك تخمين آخر شائع: يقترب من 1 ، لأن هذا هو أكثر الاحتمالات "متوازنة."

هذا يمثل الاعتقاد الخاطئ بأن التناظر في الاحتمالات من المرجح جدا أن يؤدي إلى تناظر في النتائج.

ثانيا قواعد (قوانين) عامة في نظرية الاحتمالات:

تنقسم القواعد (القوانين) العامة في نظرية الاحتمالات إلى قواعد متعلقة بالجمع تستخدم في الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية وقواعد الضرب التي تستخدم في الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

تنبيه: في نظرية الاحتمالات: يرمز للاتحاد بـ $\cup$ ويكون في محل " أو" أي " + "، ويرمز للتقاطع بـ $\cap$ ويكون في محل " و" أي" × " .

(أ) **قاعدة (قانون) الجمع في نظرية الاحتمالات:**

(1) **قاعدة (قانون) الجمع في الحوادث غير المتنافية:**

إذا كان A وB حادثان غير متنافيين أي يمكن أن يحدثا معا في آن واحد فإن احتمال وقوع A أوB هو:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 1: عند رمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على رقم فردي أو من مضاعفات 3 ؟

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال 2: احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم هو 0.4 واحتمال أن يكون الجو عاصفا هو 0.6 واحتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم وعاصفا 0.2 .

أوجد احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم أو عاصفا؟

الحل: لدينا: A : احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم هو: 0.4

B : احتمال أن يكون الجو عاصفا هو: 0.6

$A \cap B$: احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم وعاصفا في آن واحد هو: 0.2

P (AUB) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) ⇨ P (AUB) = (0.4 + 0.6)– 0.2 = 0.8

(2) **قاعدة (قانون) الجمع في الحوادث المتنافية:**

إذا كان A وB حادثان متنافيين أي لا يمكن أن يحدثا معا في آن واحد فإن احتمال وقوع A أوB هو:

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$ وذلك لأن: $$P(A \cap B) = 0$$

مثال 1: عند رمي قطعة نقود ما هو احتمال ظهور الصورة أو الرقم ؟

$$P(A) = 0.5 \ / \ P(B) = 0.5 \ / P(A \cap B) = 0 \qquad P(AUB) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.5 = 1$$

إعداد الأستاذ: داودي حمزة

H.DAOUDI

مثال 2 : عند رمي حجر نرد ، ما هو احتمال الحصول على 2 أو 3 ؟ ما هو احتمال الحصول على 2 أو 3 أو 4 ؟

$$1)\ P(AUB) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$2)\ P(AUBUC) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب) قانون الضرب في نظرية الاحتمالات:

1) الاحتمال الشرطي Conditional probability:

لنفترض الحدث Bحيث $P(B) > 0$، من أجل أي حدثA ($A \subseteq \Omega$) ، فإن الاحتمال الشرطي لـ A علما أن B محقق يكتب $P\left({}^{A}/_{B}\right)$.

1–أ– قاعدة (قانون الضرب في الحوادث المستقلة:

إذا كان A وB حادثان مستقلين فإن:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = P(A) \quad \text{و} \quad P\left({}^{B}/_{A}\right) = P(B)$$

أي

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \quad \text{و} \quad P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

فيكون احتمال وقوع الحدثين AوB معا هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال1: ما هو احتمال الحصول على الرقمين 3، 3 عند رمي حجري نرد؟

الحل: لدينا:

- A : احتمال أن يكون الرقم 3 على الحجر الأول هو: $P(A) = \frac{1}{6}$
- B : احتمال أن يكون الرقم 3 على الحجر الثاني هو: $P(B) = \frac{1}{6}$
- $(A \cap B)$: احتمال أن يكون الحجران 3، 3 في آن واحد هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

1–ب– قاعدة (قانون) الضرب في الحوادث غير المستقلة: يحسب بالعلاقة:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ومعناه احتمال حدوث A إذا علمنا أن B قد حدث فعلا.

أما حساب احتمال وقوع A وB معا فيتم من خلال العلاقة: $P(A \cap B) = P\left({}^{A}/_{B}\right)P(B) = P\left({}^{B}/_{A}\right)P(A)$

مثال1: مجموعة مكونة من أربعة رجال وثلاث نساء، اختير عشوائيا وعلى التوالي من بينهم شخصان، فما احتمال أن يكون:

1) الشخص الأول رجلا والثاني رجلا؟

2) الشخص الأول رجلا والثاني امرأة؟

مثال2: اذا كان احتمال نجاح علاء في الإحصاء هو $\frac{1}{2}$ واحتمال نجاح علاء ويعقوب هو $\frac{1}{3}$، فما هو احتمال نجاح يعقوب؟

الحل: لدينا:

- احتمال نجاح علاء: $P(B) = \frac{1}{2}$
- احتمال نجاح علاء ويعقوب هو: $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

$B \cap A$: احتمال أن يكون الحجران 3، 3 في آن واحد هو:

$$P\left(A/_B\right)=\frac{P\,(A\cap B)}{P\,(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

مثال3: صندوق يحوي 14 كرة منها 8 حمراء، 6 زرقاء سحبت كرتان (عشوائياً) من الصندوق الواحدة وراء الأخرى دون إرجاع، أحسب احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء.

الحل: ليكن A حدث سحب كرة حمراء اللون، وB حدث سحب كرة زرقاء اللون، فالمطلوب هو حساب $P\left(A/_B\right)$ حيث A السحبة الثانية، B السحبة الأولى.

$$P(A\cap B)=P\left(B/_A\right)P(A).$$
$$P(A\cap B)=\frac{8}{14}\times\frac{6}{13}=\frac{54}{91}$$
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مثال2: إذا كان احتمال نجاح إسحاق في الإحصاء هو$\frac{1}{4}$ واحتمال نجاح بلال هو $\frac{1}{2}$ واحتمال نجاح إسحاق وبلال هو $\frac{1}{6}$

هل نجاح إسحاق ونجاح بلال مستقلان أم لا؟

- احتمال نجاح إسحاق: $P(A)=\frac{1}{4}$
- احتمال نجاح بلال: $P(B)=\frac{1}{2}$
- احتمال نجاح إسحاق وبلال هو: $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

إذا كان الحادثان مستقلان معناه: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

وبما أن $\frac{1}{8}\neq\frac{1}{6}$ فإن نجاح إسحاق ونجاح بلال غير مستقلان.

مثال3: إذا كان احتمال وصول طائرة من مطار لندن إلى مطار العاصمة في موعدها (0.9)، واحتمال وصول طائرة من مطار قسنطينة إلى مطار باريس في موعدها (0.6)، (رحلتي الطائرتين مستقلتان). ما هو احتمال وصول الطائرتين في موعدها؟

على اعتبار A حادث وصول الطائرة الأولى في موعدها

و B حادث وصول الطائرة الثانية في موعدها

$$P(A)=0.9$$
$$P(B)=0.6$$
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0.9\times0.6=0.54$$

تمارين:

1) إذا كان احتمال وفاة حيوان في حديقة الحيوانات هو 0.05 فما هو احتمال أن يعيش؟

2) نرمي حجر نرد وقطعة نقدية معا، ما هو احتمال الحصول على صورة والعدد 6 ؟ (نتيجة مكعب النرد مستقلة عن نتيجة القطعة النقدية).

الحل:

1) $P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.05=0.95$

2) $P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

H.DAOUDI