ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

المحور الأول: التحليل التوفيقي Combinatorial analysis

التحليل التوفيقي هو فرع من الرياضيات يهتم بحل مشاكل اختيار وترتيب عناصر معينة (عادة ما تكون محدودة) وفقا لقواعد محددة.

وتحدد كل قاعدة من هذه القواعد طريقة إنشاء تشكيلات (مجموعة جزئية) من المجموعة المحددة (المجموعة الكلية)، والتي تسمى تشكيلات توفيقية (أو توافقية)، وأبسط الأمثلة على التشكيلات التوفيقية هي التباديل والترتيبات والتوافيق، وبالتالي يمكن القول إن الهدف من التحليل التوفيقي هو دراسة تلك التشكيلات التوفيقية.

كان ظهور المفاهيم الأساسية والتطورات في التحليل التوفيقي موازٍ لتطوير فروع أخرى للرياضيات مثل الجبر(algebra)، نظرية الأعداد (number theory)، نظرية الاحتمالات (probability theory)، وكلها مرتبطة ارتباطًا وثيقًا بالتحليل التوفيقي.

ارتبط ظهور التحليل التوفيقي كفرع من الرياضيات مع عمل باسكال B. Pascal و P. (de) Fermat على نظرية ألعاب الحظ، هذه الأعمال التي شكلت أسس نظرية الاحتمالات، احتوت في نفس الوقت على مبادئ تحديد عدد التشكيلات (التوليفات) من عناصر مجموعة منتهية، وبالتالي أرست العلاقة التقليدية بين التحليل التوفيقي ونظرية الاحتمالات.

قدم ليبنيز G. Leibniz في رسالته (Ars Combinatoria) فن التوافيق مساهمة كبيرة في التطوير المنهجي للأساليب التوفيقية، حيث ظهر مصطلح " التوفيقي " لأول مرة.

من أهم الأعمال التي ساهمت أيضا في إنشاء التحليل التوفيقي كانت ورقة بحثية درست فن التخمين (Ars Conjectandi) قدمت من قبل برنولي J. Bernoulli. الذي وضع الأفكار الأساسية لنظرية الاحتمالات، وقد تم وضع عدد من المفاهيم التوفيقية واستخدمت لحساب الاحتمالات، ولذلك يمكن القول أن مع ظهور أعمال ليبنيز وبرنولي، بدأت طرق التحليل التوفيقي تتجه لتكون فرعا مستقلا من الرياضيات.

لماذا نريد أن ندرس التحليل التوفيقي؟

- في كثير من الأحيان نجد مواقف يمكن فيها القيام بشيء بطرق مختلفة.
- فمن أجل العثور على أفضل طريقة، نحتاج إلى معرفة عدد الطرق الممكنة في المجموع.
- أي كم عدد الطرق الممكنة؟ ثم أي واحد منها هو الأفضل؟

1) المبدأ الأساسي للعد The Basic Counting Principle:

إذا كان إجراء العمل (A) يتم بـ n طريقة وإجراء العمل (B) يتم بـ n' طريقة، فإن عدد الطرق المختلفة للقيام بالعملين معا هو: nxn'.

إذا كان إجراء العمل (A) يتم بـ n طريقة وإجراء العمل (B) يتم بـ n' طريقة، وإجراء العمل (C) يتم بـ n'' طريقة فإن عدد الطرق المختلفة للقيام بالأعمال الثلاثة معا هو: $nxn'xn''$.

مثال1: يقدم أحد المطاعم 6 أصناف من الأطباق الرئيسية، و4 أصناف من السلطات، و3 أصناف من الحلوى.

كم عدد الطرق الممكنة لاختيار وجبة (مكونة من صنف واحد من كل نوع)

الحل: اختيار صنف من الأطباق الرئيسية يتم بستة طرق، واختيار صنف من السلطات يتم بأربع طرق، واختيار صنف من الحلوى يتم بثلاث طرق، إذن عدد طرق اختيار الوجبة الغذائية = 72=3x4x6 طريقة.

مثال2:

مركز تجاري له 6 أبواب، يريد هشام الدخول للمركز تجاري من أحد الأبواب والخروج من باب آخر، بكم طريقة يستطيع فعل ذلك؟

الحل: يمكن لهشام الدخول للمركز تجاري من أحد الأبواب الـ 6 أي بستة طرق، في حين يمكنه الخروج من المركز تجاري من أحد الأبواب الـ 5 غير الباب الذي دخل منه أي بخمسة طرق، إذن عدد طرق الدخول للمركز تجاري من أحد الأبواب والخروج من باب آخر = 30=5x6 طريقة.

مثال3:

يعمل في شركة 8 مهندسين، 3 فنيين، 24 عاملا. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مكون من مهندس وفني وعامل؟

H.DAOUDI

ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

اختيار المهندس يتم بـ 8 طرق، واختيار الفني يتم بـ 3 طرق، واختيار العامل يتم بـ 24 طرق، إذن عدد طرق اختيار الفريق= 576=24x3x8 طريقة.

مثال4: كم عدد من مضاعفات 5 يوجد من 10 إلى 95؟

الحل: نعلم أن مضاعفات 5 هي أعداد صحيحة تحتوي على 0 أو 5 في أقصى اليمين (الأحاد).

يمكن اختيار الرقم الأول في أقصى اليمين بطريقتين، ويمكن أن يكون الرقم الثاني (العشرات) أي واحد من 9،8،7،6،5،4،3،2،1، أي 9 خيارات.

وبالتالي مضاعفة 5 من 10 إلى 95 هناك $2 \times 9 = 18$.

مثال5: في احدى المدن، يرمز لخطوط الحافلات بعدد طبيعي أقل من 100، متبوعا بأحد الأحرف A أو B أو C أو D أو E أو F.

كم عدد خطوط الحافلات الممكنة؟

الحل: يمكن أن يكون الرقم أيًا من الأرقام الطبيعية من 1 إلى 99 أي أن هناك 99 خيارًا للرقم، بينما يمكن اختيار الحرف بـ 6 طرق.

فيكون عدد خطوط الحافلات الممكنة هو: $99 \times 6 = 594$.

مثال6: في ورقة امتحان هناك 3 أسئلة، فإذا كانت الأسئلة تحتوي على 4، 3، 2 من الحلول (على التوالي)، فما هو العدد الإجمالي للحلول؟

الحل: السؤال الأول لديه 4 حلول، والسؤال الثاني لديه 3 حلول والسؤال الثالث لديه 2 من الحلول.

بتطبيق المبدأ الأساسي للعد، يكون العدد الإجمالي للحلول = $4 \times 3 \times 2 = 24$.

مثال7: عند رمي قطعة نرد وعملة معدنية، ما هو العدد الإجمالي للنتائج.

الحل: رمي قطعة نرد يتم بـ 6 طرق ورمي عملة معدنية يتم بطريقتين فالنتائج المحتملة هي $6 \times 2 = 12$.

مثال8: للوصول من ميلة إلى سطيف هناك ثلاث طرق وللوصول من سطيف إلى البرج هناك طريقان. كم عدد الطرق للوصول من ميلة إلى البرج؟

الحل: عدد الطرق للوصول من ميلة إلى البرج هو= 2x3= 6 طرق.

2) التباديل Permutations:

تباديل مجموعة بها n عنصرا (تختلف فيما بينها) هو عدد الطرق المختلفة لترتيب تلك العناصر (عدد إمكانات ترتيب الـ n عنصرا).

أ) التباديل دون تكرار Permutations without Repetition:

تباديل مجموعة بها n عنصرا (تختلف فيما بينها) هو عدد الطرق المختلفة لترتيب تلك العناصر (عدد إمكانات ترتيب الـ n عنصرا).

- في التباديل دون تكرار نستخدم كل العناصر **n** (كل من كل).
- تختلف كل تبديلة عن الأخرى باختلاف ترتيب عنصر على الأقل (الترتيب مهم).
- لا يوجد تكرار (لا يظهر نفس العنصر أكثر من مرة في الترتيب) لأن العناصر تختلف فيما بينها مثنى مثنى.
- يرمز للتباديل دون تكرار لـ **n** عنصرا بـ $\mathbf{P_n}$.
- تحسب وفق العلاقة:

$$P_n = n!$$

مثال1: تحتوي موسوعة على 6 مجلدات، ما هي عدد الطرق التي يمكن بها وضع الـ 6 مجلدات على رف.

الحل: يمكن وضع **أول** مجلد على الرف بستة طرق (اختيار واحد من الستة لوضعه في الرف).

يمكن وضع **ثاني** مجلد على الرف بخمسة طرق (اختيار واحد من الخمسة الباقية لوضعه في الرف).

يمكن وضع **ثالث** مجلد على الرف بأربعة طرق (اختيار واحد من الأربعة الباقية لوضعه في الرف) **وهكذا**.

ويكون إجمالي عدد الطرق التي يمكن وضع الـ 6 مجلدات على الرف هي: $P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

مثال2: بكم طريقة يستطيع مدرب حيوانات ترتيب 5 أسود و 4 نمور في صف بحيث لا يكون هناك أسدان معاً؟

الحل:

أسد	نمر	أسد	نمر	أسد	نمر	أسد	نمر	أسد

H.DAOUDI

ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

يتم ترتيب الـ 5 أسود في 5 أماكن (التي فيها كلمة أسد) كما في الأعلى، ويتم القيام بذلك بـ !5 طريقة.

ويتم ترتيب النمور الأربعة في الأماكن الأربعة (التي فيها كلمة نمر) ويتم القيام بذلك بـ !4 طريقة.

أي يمكن ترتيب الأسود والنمور بـ !5×!4 = 2880 طريقة.

مثال3: تريد أن تزور 10 أشخاص، كل واحد منهم يعيش في مدينة مختلفة، بكم طريقة مختلفة يمكنك زيارتهم جميعا؟

الحل: زيارتهم جميعا تعني (كل من كل) تباديل دون تكرار، تحسب وفق العلاقة: $P_{n}=n!$

ويكون إجمالي عدد الطرق التي يمكن بها أن تزور الـ 10 أشخاص هي: 3628800

$P_{10}= 10! =3628800$

مثال4: تريد أن تزور 10 أشخاص، كل واحد منهم يعيش في مدينة مختلفة، من بين هؤلاء الأشخاص الـــ 10، هناك 6 من أقاربك، كم عدد الطرق المختلفة الممكنة لزيارتهم جميعا إذا كنت ترغب في زيارة عائلتك أولاً؟

الحل: تزور أقاربك (6 من 6) و تزور البقية (4 من 4) (كل من كل) تباديل دون تكرار

$P_6\, P_4 = 6!\, 4! = 720 \times 24 = 17280$

مثال4: لدي 11 قرص DVD لأفلام، من بينها 4 أفلام أكشن، فلمين للخيال العلمي، 3 أفلام تاريخية، وفلمين كوميديان، وأريد أن أضعها على رفّ بحيث تكون كل الأقراص التي تتناول نفس الموضوع بجانب بعضها، كم عدد الطرق المختلفة للقيام بذلك؟

أضعها أفلام الأكشن مع بعض وأفلام الخيال العلمي مع بعض والأفلام التاريخية مع بعض والأفلام الكوميدية مع بعض:

$P_4\, P_3\, P_2\, P_2 = 4!\, 3!\, 2!\, 2! = 24 \times 6 \times 2 \times 2 = 576.$

أنظر الموقع لحساب أي تباديل: **www.dcode.fr/permutations-generator**

ب) تباديل مع التكرار Permutations with Repetition :

تباديل مجموعة بها **n** عنصرا (تتكرر بعض عناصرها) هو عدد الطرق المختلفة لترتيب تلك العناصر (دون احتساب التباديل المتشابهة نتيجة التكرار).

- في التباديل مع تكرار نستخدم كل العناصر **n** (كل من كل).
- تختلف كل تبديلة عن الأخرى باختلاف ترتيب عنصر على الأقل (الترتيب مهم).
- يوجد تكرار (تظهر بعض العناصر أكثر من مرة في الترتيب) لأن العناصر تتكرر.
- يرمز للتباديل مع التكرار بـ $P_n^{n_1,n_2,\ldots n_k}$.
- حيث $n_1, n_2, \ldots n_k$ هي عدد مرات تكرار كل عنصر من العناصر **n**.
- يمكن عدم إدراج العناصر التي تتكرر مرة واحدة لعدم تأثيرها على الجداء لأن $1! = 1$.
- تحسب وفق العلاقة: $P_n^{n_1,n_2,\ldots n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

مثال1: كم كلمة يمكن تشكيلها من جميع أحرف كلمة ميسيساغا mississauga؟

الحل: عدد الكلمات يمكن تشكيلها من جميع أحرف كلمة (ميسيساغا mississauga) هي تباديل مع التكرار تحسب بالعلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

أ) ميسيساغا عدد الأحرف 8(م=1، ي=2، س=2، أ=2، غ=1) $P_8^{2,2,2,1,1} = \dfrac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040.$

ب) mississauga عدد الأحرف 11(m=1، i=2، s=4، a=2، g=1، u=1) $P_{11}^{4,2,2,1,1,1} = \dfrac{11!}{4!2!2!} = 415800.$

3) التراتيب Arrangements:

هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية ذات k عنصرا من مجموعة كلية ذات n عنصرا مع أهمية ترتيب العناصر في المجموعة المختارة.

بعبارة أخرى هي عدد إمكانات ترتيب k عنصرا مأخوذة من n عنصرا مع $k \leq n$.

H.DAOUDI

ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

أ) التراتيب دون تكرار Arrangement without Repetition:

هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية ذات k عنصرا من مجموعة كلية ذات n عنصرا مع أهمية ترتيب العناصر في المجموعة المختارة وعدم تكرارها.

بعبارة أخرى هي عدد إمكانات ترتيب k عنصرا مأخوذة من n عنصرا (دون تكرار) مع $k \leq n$.

- في التراتيب دون تكرار نستخدم جزء من العناصر(k) من العناصر الكلية **n** (جزء من كل).
- تختلف كل ترتيبة عن الأخرى باختلاف العناصر أو باختلاف ترتيب أحد العناصر (الترتيب مهم) أو الاثنين معا.
- لا يوجد تكرار (لا تظهر نفس العناصر أكثر من مرة في الترتيب) لأن العناصر لا تتكرر.
- يرمز للتراتيب دون تكرار بـ A_n^k
- تحسب وفق العلاقة: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **حالات خاصة:**
  - لما K= n فإن: $A_n^k = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$
  - لما K= 0 فإن: $A_n^k = A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$
  - لما K= 1 فإن: $A_n^k = A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

أنظر الموقع لحساب أي تراتيب: **www.dcode.fr/partial-k-permutations**

مثال1: كم علما يمكن تشكيله باستخدام 3 قطع قماش من 7 قطع قماش ملونة ألوانا مختلفة؟

الحل: نختار 3 من 7 قطع قماش مختلفة الألوان لتشكيل العلم (جزء من كل والترتيب مهم والتكرار غير ممكن إذن تراتيب دون التكرار)

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\qquad A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$

عدد الأعلام التي يمكن تشكيلها هو: 210.

مثال2: بكم طرية يمكن لفريق مكون من 8 لاعبين في كرة السلة أن يختار قائد وقائد مساعد؟

مثال3: في سباق الفورمولا 1، هناك 22 سائق، فقط السائقون العشرة الأوائل الذين يعبرون خط النهاية يكسبون نقاط البطولة، بكم طريقة يمكن للمتسابقين كسب النقاط؟

كسب النقاط يتم بفوز 10 من 22 أي جزء من كل والترتيب مهم والتكرار غير موجود: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$A_{22}^{10} = \frac{22!}{(22-10)!} = \frac{22!}{12!} = 2346549004800$$

ب) التراتيب مع التكرار Arrangement with Repetition:

هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية ذات k عنصـرا من مجموعة كلية ذات n عنصـرا مع أهمية ترتيب العناصـر في المجموعة المختارة وإمكانية تكرارها.

- في التراتيب مع تكرار نستخدم جزء من العناصر(k) من العناصر الكلية **n** (جزء من كل) مع $k \leq n$.
- تختلف كل ترتيبة عن الأخرى باختلاف العناصر أو باختلاف ترتيب أحد العناصر (الترتيب مهم) أو الاثنين معا.
- يوجد تكرار (قد تظهر نفس العناصر أكثر من مرة في الترتيب) لأن العناصر تتكرر.
- يرمز للتراتيب مع التكرار بـ ${}_rA_n^k$
- تحسب وفق العلاقة: ${}_rA_n^k = n^k$

مثال: كم كلمة سر (من أربعة أرقام) يمكن تشكيلها لحماية هاتفك؟

إعداد الأستاذ: داودي حمزة

H.DAOUDI

الحل: هناك 10 أرقام (من 0 إلى 9) نختار منها 4 أرقام لتشكيل كلمة السر (جزء من كل والترتيب مهم والتكرار ممكن إذن تراتيب مع التكرار)

$${}_rA_n^k = n^k \qquad {}_rA_{10}^4 = 10^4$$

4) التوافيق Combinations:

هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية ذات k عنصرا من مجموعة كلية ذات n عنصرا (k ≤ n) مع عدم أهمية ترتيب العناصر في المجموعة المختارة.

أ) التوافيق دون تكرار Combinations without Repetition:

التوافيق دون تكرار هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية ذات k عنصرا من مجموعة كلية ذات n عنصرا مع عدم أهمية ترتيب العناصر في المجموعة المختارة وعدم تكرارها.

- في التوافيق دون تكرار نستخدم جزء من العناصر(k) من العناصر الكلية **n** (جزء من كل) مع k ≤ n.
- تختلف كل توفيقة عن الأخرى باختلاف أحد العناصر على الأقل (الترتيب لا يهم).
- لا يوجد تكرار (لا تظهر نفس العناصر أكثر من مرة في الترتيب) لأن العناصر لا تتكرر.
- يرمز للتوافيق دون تكرار بـ C_n^k
- تحسب وفق العلاقة: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow A_n^k = k!\,C_n^k = k!\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **حالات خاصة:**
  - لما K= n فإن: $C_n^k = C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$
  - لما K= 0 فإن: $C_n^k = C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$
  - لما K= 1 فإن: $C_n^k = C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$
  - $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$
- **مثلث باسكال Pascal's Triangle**

n \ k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \qquad (1)$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \qquad (2)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^K C_n^k \qquad (3)$$

لمعرفة قيمة التوفيقة يكفيك الذهاب إلى تقاطع قيمة n مع قيمة k .

من خلال $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ يمكنك اكمال الجدول بالقيم التي تريد

مثال1: شارك عشر أشخاص في منافسة للشطرنج كم مباراة ستلعب إذا كان كل لاعب لابد أن يواجه جميع المشاركين؟

الحل: كل مباراة تتطلب لاعبان أي 2 من 10 (جزء من كل والترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن) أي توافيق دون تكرار

H.DAOUDI

ملخص دروس في الإحصاء الرياضي

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow C_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10x9}{2x1} = 45$$

ستلعب 45 مباراة.

مثال2: بكم طريقة يمكن لعشر أشخاص أن يتفرقوا إلى مجموعة من 5 أشخاص ومجموعة من 3 أشخاص ومجموعة من 2 أشخاص؟

الحل: تتشكل المجموعة الأولى باختيار 5 من 10 والمجموعة الثانية 3 من البقية (5) والمجموعة الثالثة 2 من البقية (2)؟

(جزء من كل والترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن) أي توافيق دون تكرار.

$$C_{10}^5 . C_5^3 . C_2^2 = \frac{10!}{(10-5)!5!} \frac{5!}{(5-3)!3!} \frac{2!}{(2-2)!2!} = 252x10x1 = 2520.$$

يمكنهم أن يتفرقوا بـ 2520 طريقة.

أنظر الموقع لحساب أي توافيق: www.dcode.fr/combinations

ب) التوافيق مع التكرار Combinations with Repetition:

التوافيق مع التكرار هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية ذات k عنصرا من مجموعة كلية ذات n عنصرا مع عدم أهمية ترتيب العناصر في المجموعة المختارة وإمكانية تكرارها.

- في التوافيق مع التكرار نستخدم جزء من العناصر(k) من العناصر الكلية **n** (جزء من كل).
- تختلف كل توفيقة عن الأخرى باختلاف أحد العناصر على الأقل (الترتيب لا يهم).
- يوجد تكرار (قد تظهر نفس العناصر أكثر من مرة) لأن العناصر تتكرر.
- يرمز للتوافيق مع التكرار بـ K_n^k
- تحسب وفق العلاقة: $K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$

تمارين:

1) تشارك فرقة موسيقى من 20 عضو في موكب ثقافي، إذا سارت الفرقة في ثلاث صفوف، كم عدد طرق سيرها في موكب العرض؟
2) أحضر قريب لكم 6 هدايا في صندوق، وطلب منك اختيار ثلاثة من الهدايا الست، بكم طريقة يمكنك اختيار الهدايا؟
3) يخطط أنيس وإسلام للقيام برحلات إلى ثلاث ولايات هذا العام، هناك 7 ولاية يودون زيارتها، بكم طريقة يمكنهم اختيار الولايات المعنية بالرحلات؟ إذا قررا المكوث أسبوع ويومين ويوم واحد على التوالي في كل ولاية هل يتغير عدد الطرق؟
4) في آلة بيع سعر علبة عصير هو 60 دج، إذا كان معك قطعتين 5دج و3 قطع 10دج وقطعة 20 دج، بكم طريقة يمكنك وضع القطع في الآلة؟
5) بكم طريقة يمكن تقسيم 12 لاعباً إلى فريقين من ستة لاعبين في لعبة كرة قدم الصالات؟
6) تتألف مجموعة دوري أبطال أوروبا من أربعة فرق هي أياكس وبرشلونة وسيلتيك ودورتموند، يتأهل صاحبا المركز الأول والثاني من فرق هذه المجموعة، بكم طريقة يمكن أن يكون ترتيب هذه المجموعة؟ بكم طريقة يمكن أن يكون الفريقان المتأهلان في هذه المجموعة؟ بكم طريقة يمكن أن يكون متصدر (الأول في الترتيب) هذه المجموعة ووصيفه (الثاني في الترتيب)؟

1) **عدد طرق سيرها في موكب العرض ($P_{20} = 20!$).**
2) **يمكن اختيار الهدايا بـ (20) طريقة C_6^3.**
3) **يمكن اختيار الولايات المعنية بالرحلات بـ(35) طريقة، يصبح عدد الطرق (210).**
4) **عدد طرق وضع القطع في الآلة هو (60)** $P_6^{3,2,1}$.
5) **يمكن تقسيم 12 لاعباً إلى فريقين من ستة لاعبين بـ (924) طريقة** C_{12}^6 **x** C_6^6.
6) **يمكن أن يكون ترتيب هذه المجموعة بـ ($P_4 = 4! = 24$) طريقة، ويمكن أن يكون التأهل في هذه المجموعة بـ (6) طرق** C_4^2**، يمكن أن يكون متصدر هذه المجموعة ووصيفه بـ 12 طريقة** A_4^2.

H.DAOUDI