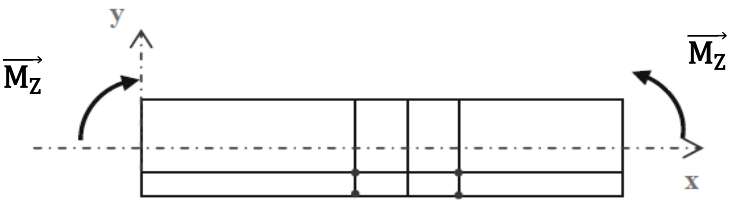
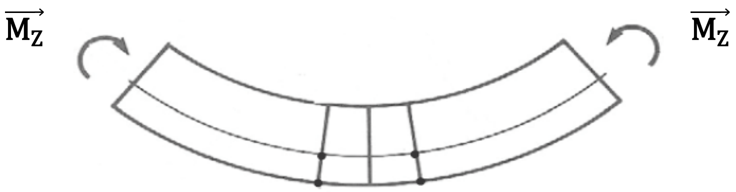
Chapitre V: Flexion simple

V.1 Définition

Une poutre est sollicitée en flexion chaque fois que sa ligne moyenne fléchit.



(a). Avant déformation



(b). Après déformation

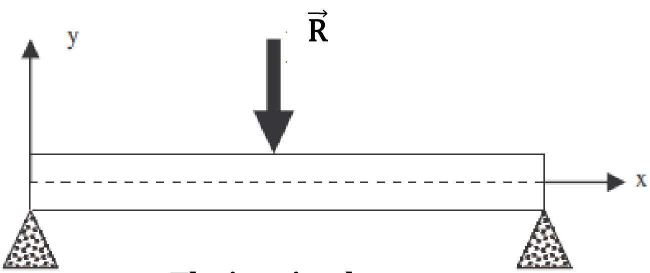
Figure (V.1): Représentation d'une poutre sollicitée en flexion

V·2 Différents types de flexion

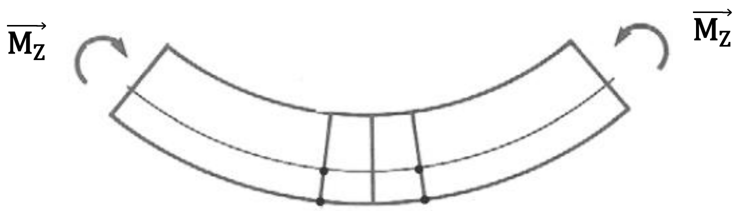
On distingue deux types principaux de la flexion plane:

- Flexion pure → $M_f \neq 0$, $T=0$
- Flexion simple → $M_f \neq 0$, $T \neq 0$

Avec: M_f: Moment fléchissant.
T: Effort tranchant



Flexion simple

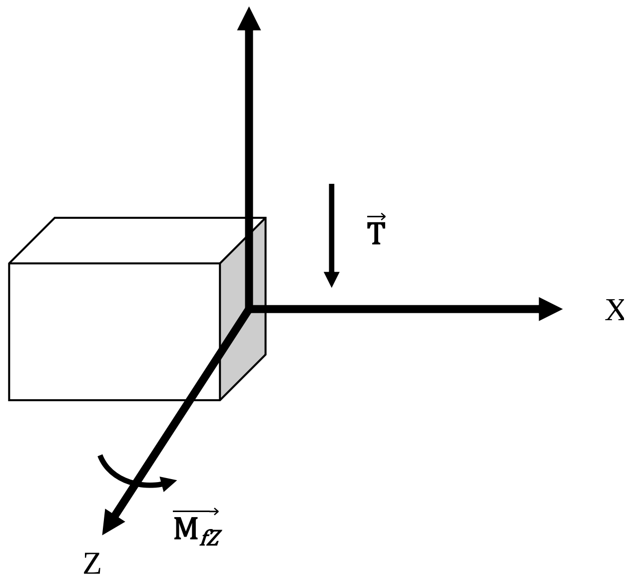


Flexion pure

Figure (V.2): Types de flexion

V·3 Efforts internes (M_f et T)

Dans ce chapitre, on étudiera le cas général c.à.d. la flexion simple où il y a deux efforts internes (M_f et T) et pour les déterminer, on utilise la méthode des sections. On note que le moment fléchissant M_f est déterminé par rapport à l'axe Z c.à.d. M_{fz} et l'effort tranchant T_y par rapport l'axe Y.



Le signe conventionnel de M_f et T est:

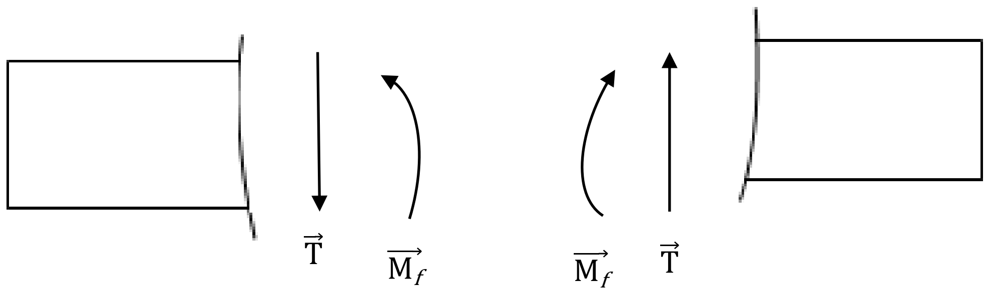


Figure (V.3): Efforts internes et signe conventionnel

- **Le moment fléchissant** est positif : s'il tend à mettre en traction les fibres inférieures longitudinales de la poutre.
- **L'effort tranchant associé** est positif : s'il tend à faire tourner le petit élément dans le sens horlogique.

V·4 Contraintes en flexion

Pour la flexion simple, ils existent deux types d'efforts:

1-Moment fléchissant M_f $\Longrightarrow$ contrainte normale σ (traction+compression)

2- Effort tranchant T $\Longrightarrow$ contrainte tangentielle de cisaillement τ

V·4·1 Contrainte normale σ (Moment fléchissant M_f)

Dans la flexion, les fibres au-dessous de la fibre moyenne sont tendues, par contre les fibres au-dessus de la fibre moyenne sont comprimées.

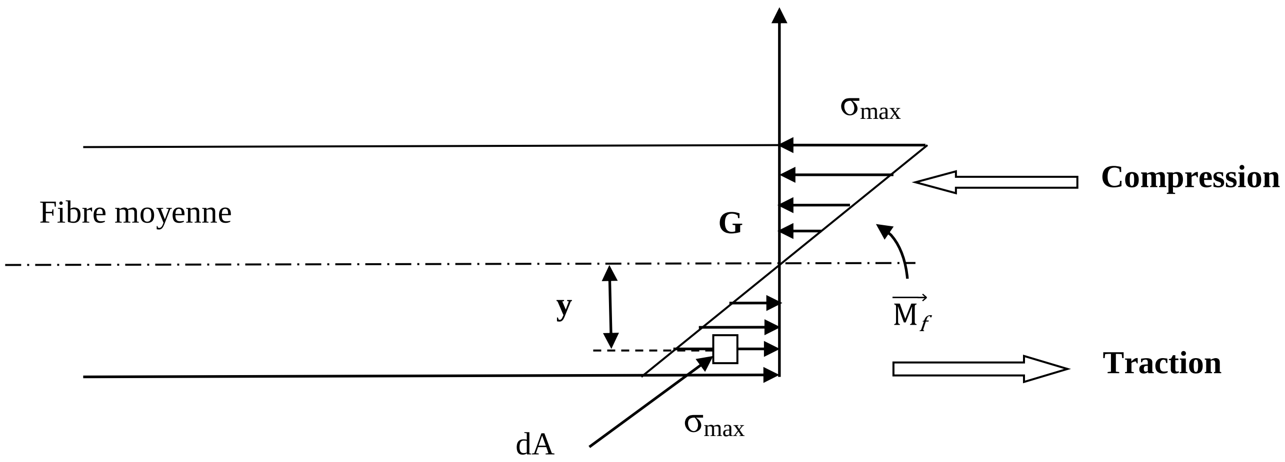


Figure (V.4): Contrainte normale σ

On a: $M_f = F\,y$ $\Longrightarrow$ $M_f = \int dF\,y$

Avec: F=N=σ A $\Longrightarrow$ dF= σ dA

Donc: avec: σ=ky (k=constante)

$$M_f = \int \sigma\, dA\, y$$

$$\Longrightarrow \quad M_f = \int ky\, dA\, y \quad \Longrightarrow \quad M_f = k\underbrace{\int y^2 dA}_{I_{Gz}} \quad \Longrightarrow \quad M_f = k\, I_{Gz}$$

On multiplie l'équation ci-dessus par y:

$$\Rightarrow M_f\ y = k\ y\ I_{Gz} \Rightarrow M_f\ y = \sigma I_{Gz} \Rightarrow \sigma = \frac{M_f\ y}{I_{Gz}}$$

Comme la contrainte σ est une fonction de y, donc on prend la valeur maximale de σ, on trouve:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f\,max}\, y_{max}}{I_{Gz}}$$

ou on écrit:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f\,max}}{\frac{I_{Gz}}{y_{max}}} \qquad \text{.......................................(V.1)}$$

On constate que $\sigma_{max} \searrow$ diminue, quand $I_{Gz} \nearrow$ augmente.

I_{Gz}: appelé le moment d'inertie de la section de la poutre et qui est une résistance à la flexion de la poutre [mm^4].

$\frac{I_{Gz}}{y_{max}}$ [mm^4]: est le module de la résistance de la poutre à la flexion.

On donne quelques formules de I_{Gz}:

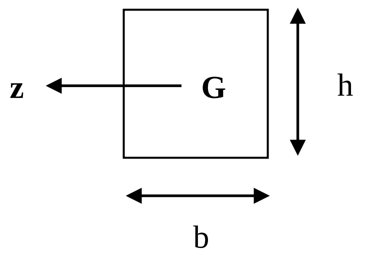
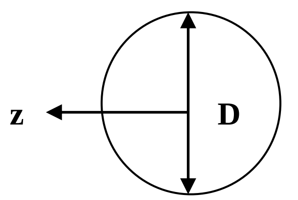
Forme	I_{Gz}	Point du σ_{max}
	$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$	$h/2$
	$I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64}$	$D/2$

Tableau (V.1): moment d'inertie de différentes sections de la poutre

V·4·2 Contrainte tangentielle τ (Effort tranchant T)

Comme il y a un effort tranchant T, donc on a une contrainte tangentielle de cisaillement τ.

En cisaillement pur, la contrainte tangentielle de cisaillement est supposée uniforme dans toute la section cisaillée (τ=constante et T=constante) et qui est calculée comme suit:

$$\tau = \frac{T}{A}$$

Seulement en flexion, le cisaillement n'est pas uniforme dans toute la section cisaillée (τ#constante). On constate que la variation de τ en fonction de y est parabolique. Donc on prend la valeur maximale de τ.

On donne quelques valeurs de τ_{max} pour deux types de sections de la poutre:

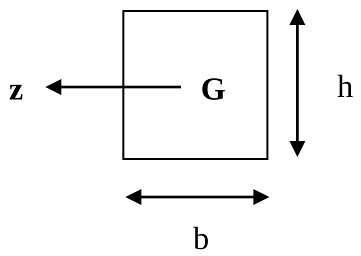
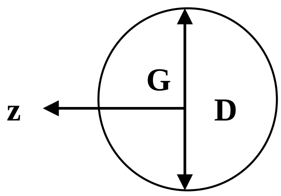
Forme	τ_{max}
	$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T_{max}}{A}$ A=bh
	$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{T_{max}}{A}$ $A=\pi D^2/4$

Tableau (VI.2): Valeurs de τ_{max} pour différentes sections de la poutre

V·5 Critère de résistance

Pour qu'une pièce sollicitée en flexion résiste en toute sécurité, il faut que:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma_{max} \leq \sigma_{ad} \\ \tau_{max} \leq \tau_{ad} \end{array}} \quad \text{..(V.5)}$$

Avec:

σ_{max} : Contrainte maximale

σ_{ad} : Contrainte pratique ou admissible

τ_{max} : Contrainte maximale

τ_{ad} : Contrainte pratique ou admissible

Seulement en flexion simple, le cisaillement est négligeable ($\sigma >> \tau$), donc le critère de résistance utilisé est:

$$\boxed{\sigma_{max} \leq \sigma_{ad}} \quad \text{..(V.6)}$$

V.6 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. On désigne par flèche à l'abscisse x, le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à cette abscisse. Elle est comptée positivement si le déplacement s'effectue vers le bas. Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de déformée.

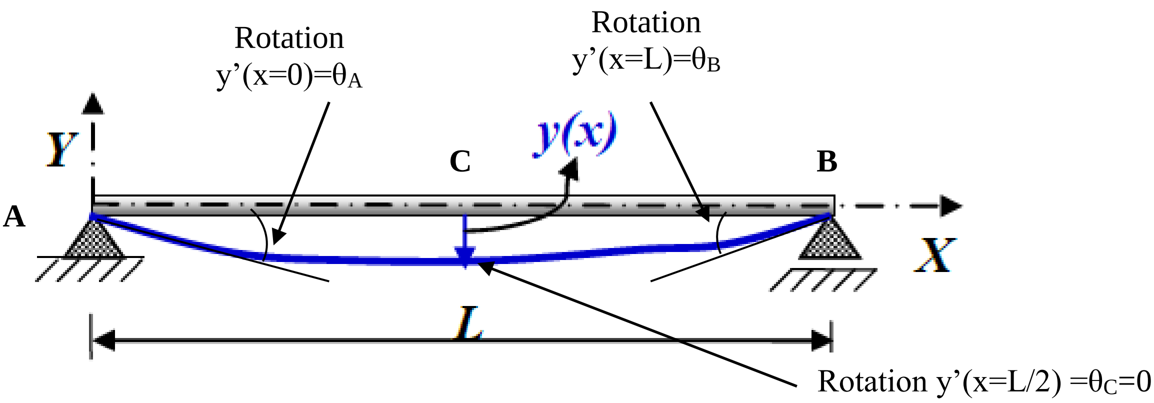


Figure (V.6): Poutre déformée

a) Déformée :

La déformée d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (si l'intensité, le type de chargement … change, la déformée changera).

- *Remarque: il est très important de ne pas confondre « déformée » et « déformations ». En effet, la déformation est un allongement par unité de longueur, alors qu'une déformée est la combinaison entre une translation [m] et une rotation [rad].*

b) Flèche:

Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle « flèche »

c) Rotation:

Certaines sections subissent une rotation. Cette rotation est naturellement la même que celle de la ligne moyenne.

On admet la relation suivante qui permet le calcul de la déformée:

$$\boxed{y''(x) = \frac{M(x)}{E\,I}} \qquad \text{(V.4)}$$

$y''(x)$: est la dérivée seconde de la flèche par rapport à x

$y'(x)$: est la rotation de la section par rapport à sa position initiale s'appelle angle de rotation de la section

$M(x)$: le moment fléchissant à la section d'abscisse x.

E: le module d'élasticité longitudinale (module d'Young).

I: le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe (Δ) passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre.

Pour avoir la flèche y, il faut donc intégrer cette équation deux fois, d'où l'obtention d'une équation en fonction de deux constantes que l'on obtient par les conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent, généralement:

- Pour **un appui:** $y = 0$

- Pour **un encastrement:** $y = 0$ et $y' = 0$