

## RESISTANCE des MATERIAUX

<b>1. OBJET DE LA RDM, EQUILIBRES EXTERNES ET INTERNES .....</b>	<b>3</b>
1.1. Buts de la RdM .....	3
1.2. Hypothèses fondamentales de la RdM.....	3
<b>2. NOTION DE POUTRES .....</b>	<b>4</b>
2.1. Généralités .....	4
2.2. Torseur statique de cohésion.....	5
2.3. Efforts appliqués à une section droite de poutre .....	6
2.4. Réactions d'appui .....	7
<b>3. DEFORMATION DES CORPS REELS.....</b>	<b>7</b>
3.1. Déformations élastique et plastique .....	8
3.2. Allongement et allongement relatif.....	8
<b>4. CONTRAINTES.....</b>	<b>8</b>
4.1. Définition .....	9
4.2. Sollicitations simples .....	9
4.2.1. Définition .....	9
4.2.2. Traction et Compression simple.....	10
4.2.3. Cisaillement simple.....	10
4.2.4. Torsion simple.....	10
4.2.4. Flexion plane simple pure .....	10
<b>5. TRACTION SIMPLE .....</b>	<b>10</b>
5.1. Définition – Hypothèses .....	10
5.2. Bases expérimentales – essai de traction uniaxiale.....	11
5.2.1. Essai de traction uniaxiale.....	11
5.2.2. Module d'Young.....	12
5.2.3. Limite d'élasticité .....	13
5.2.4. Module d'élasticité transverse .....	13
5.2.5. Zones de déformation plastique .....	13
5.3. Conditions de Résistance des Matériaux .....	17
5.3.1. Situation classique.....	17
5.3.2. Concentrations de contraintes .....	17
<b>6. COMPRESSION SIMPLE .....</b>	<b>18</b>
6.1. Définition – Hypothèses .....	18
6.2. Déformations et contraintes .....	18
6.3. Conditions de Résistance .....	18
<b>7. CISAILLEMENT SIMPLE.....</b>	<b>19</b>
7.1. Définition – Hypothèses .....	19
7.2. Essai de cisaillement simple.....	19
7.3. Conditions de Résistance des Matériaux .....	20

<b>8. TORSION SIMPLE .....</b>	<b>21</b>
8.1. Définition – Hypothèses .....	21
8.2. Essai de torsion .....	21
8.3. Contraintes tangentielles.....	23
8.4. Equation de déformation élastique, module de torsion.....	23
8.5. Contrainte maximale.....	24
8.6. Condition de résistance.....	25
8.7. Condition de rigidité.....	25
<b>9. FLEXION PLANE SIMPLE .....</b>	<b>25</b>
9.1. Définition – Hypothèses .....	25
9.1.1. Les différents types de flexion .....	25
9.1.2. Flexion plane simple .....	26
9.2. Equation fondamentale de la flexion .....	26
9.2.1. Essai de flexion plane simple.....	26
9.2.2. Relation entre $\vec{T}$ et $\vec{M}_f$ .....	27
9.2.3. Diagrammes $\vec{T}$ et $\vec{M}_f$ .....	28
9.3. Expression des contraintes en fonction de $M_f$ .....	32
9.3.1. Contraintes normales.....	32
9.3.1. Contraintes tangentielles.....	33
9.4. Contraintes maximales.....	33
9.5. Conditions de résistance .....	33
9.6. Déformations .....	34
9.6.1. Déformations longitudinales .....	34
9.6.2. Recherche de la courbure.....	34
<b>10. FLAMBAGE SIMPLE.....</b>	<b>35</b>
10.1. Observations .....	35
10.2. Formule d'Euler.....	36
10.3. Dépendance avec le type d'appui .....	37
10.4. Conditions de résistance .....	37
10.4.1. Méthode d'Euler .....	38
10.4.2. Méthode Euler-Rankine .....	38
10.4.3. Méthode de Duteil.....	38
<b>11. LA FATIGUE .....</b>	<b>39</b>

## 1. Objet de la RdM, équilibres externes et internes

### 1.1. Buts de la RdM

Pour qu'une construction remplisse son rôle, il est nécessaire que:

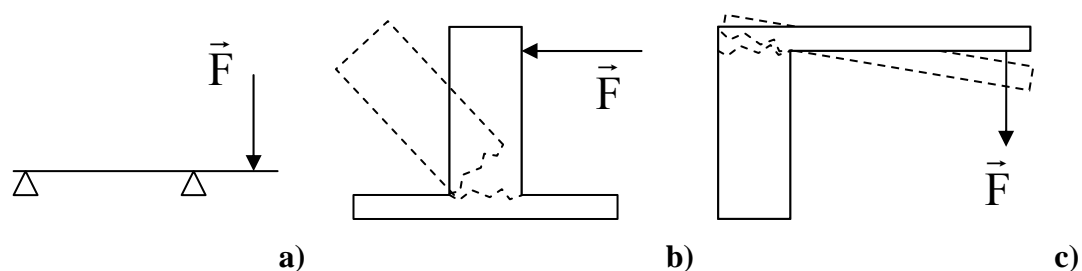
- l'équilibre externe soit assuré (équilibre statique, Figure 1a): on considère alors les solides comme indéformables, et de limite élastique illimitée,
- l'équilibre interne soit également assuré (Figure 1b): les solides sont alors considérés comme réels, donc déformables, avec une limite élastique finie.

L'objet de la RdM est alors de fournir les conditions de fonctionnement pour une construction donnée, c'est à dire:

- déterminer si une structure donnée peut supporter les charges appliquées
- les efforts appliqués étant connus, dimensionner la structure, et donc vérifier que les déformations induites par les charges sont inférieures aux limites acceptables en fonctionnement.

On rappelle que les forces intérieures aux solides sont des forces élastiques (forces de cohésion), qu'elles s'opposent au déplacement interne et s'annihilent deux à deux. Elles n'interviennent donc pas sur l'équilibre externe statique. La valeur des forces intérieures sera donc nécessairement limitée pour éviter la décohésion du matériau (destruction), et ceci nécessite:

- un calcul de ces forces intérieures
- de connaître les limites acceptables des matériaux



**Figure 1:** Exemples de structures pour lesquelles l'équilibre extérieur (a), intérieur (b) ou les deux (c) risquent de ne pas être respectés sous l'action d'une force  $\vec{F}$

### 1.2. Hypothèses fondamentales de la RdM

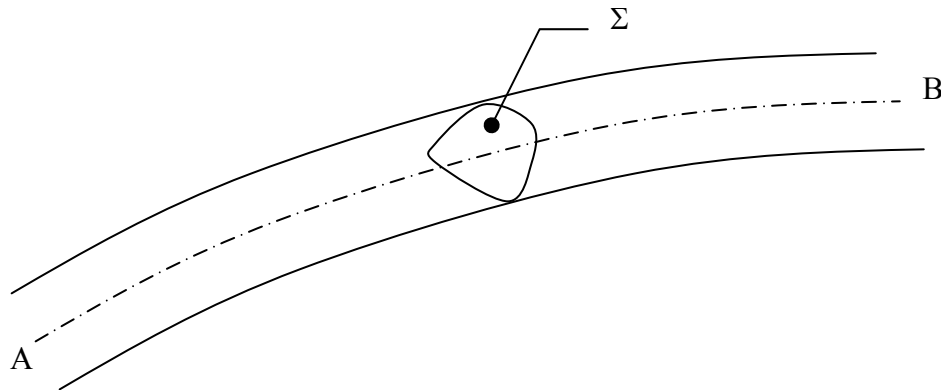
Nous nous placerons dans le cadre de ce cours sous plusieurs hypothèses restrictives, qui correspondent à l'élasticité classique. Les hypothèses de ce cadre classique portent sur:

- les matériaux solides: ils seront considérés comme homogènes, et mécaniquement isotropes (ils possèdent les mêmes caractéristiques mécaniques quelle que soit la direction d'observation ou d'application des forces).
- Les déformations: nous nous placerons dans un contexte de petites déformations, de telle façon à rester à l'intérieur du domaine élastique du matériau (avec une loi de comportement linéaire, l'élasticité classique est donc souvent appelée aussi élasticité linéaire. De plus, toute section plane restera plane pendant et après déformation.
- La superposition des effets des forces: Le vecteur déformation (et contrainte) dû à un système de forces extérieures est égal à la somme géométrique des vecteurs déformations (et contraintes) de chacune des forces du système extérieur.

## 2. Notion de Poutres

### 2.1. Généralités

Les "poutres" sont utilisées comme modèles pour les déformations (Figure 2). Lorsqu'un matériau se déforme, certaines parties du matériau sont comprimées, d'autres étirées. Il existe une ligne sans déformation appelée fibre neutre ou ligne moyenne, AB. Durant toute la déformation, on peut trouver une section droite  $\Sigma$  qui reste perpendiculaire à AB. On peut donc dire que la poutre est le solide engendré par la surface plane  $\Sigma$  dont le centre de gravité se déplace le long de la courbe  $C = AB$  appelée ligne moyenne.



**Figure 2:** Poutre modèle pour la résistance des matériaux

La notion de poutre n'est utilisable que sous certaines conditions:

- C doit avoir un grand rayon de courbure
- La longueur AB doit être grande par rapport aux dimensions transversales
- Les variations de sections doivent rester faibles

- La section plane  $\Sigma$  reste plane après déformation (principe de Navier-Bernouilli).

Pour un rayon de courbure  $R$ , et la plus grande dimension  $h$  de la section  $\Sigma$ , il est commun de respecter:

$$R > 5h \quad \text{et} \quad 10h < \ell < 100h$$

Les forces appliquées à la poutre seront soit des forces directement appliquées (poids, forces d'utilisation), soit des réactions d'appui.

## 2.2. Torseur statique de cohésion

Soit une poutre soumise à un torseur statique dû aux forces extérieures  $\vec{F}_i$  (Figure 3a), dit torseur de cohésion, telles que quel que soit le point  $M$  appartenant à la poutre on a la condition d'équilibre:

$$\{\mathbf{T}_C\}_M = \vec{0} \quad \text{Eq. 1}$$

Après coupure selon une section droite (plan  $\pi$ ), les deux parties résultantes ne sont plus en équilibre l'une par rapport à l'autre, mais chacune d'elles forme un système en équilibre (Figure 3b). Ainsi les forces intérieures développées sur la section de coupure représentent l'action de la partie gauche (g) du système initial sur sa partie droite (d), ou inversement. On peut donc étudier l'équilibre des deux tronçons obtenus par coupure:

Sur le tronçon (g) s'applique au centre de gravité  $G$  le torseur dû au système de forces extérieures appliquées à (g),  $\{\mathbf{T}_{\text{Fext}}(g)\}_G$ , ainsi que le torseur dû à la cohésion de la poutre initiale appliqué par (d) sur (g),  $\{\mathbf{T}_{C(d) \rightarrow (g)}\}_G$ . Sur le tronçon (d) s'applique le torseur dû au système de forces extérieures appliquées à (d),  $\{\mathbf{T}_{\text{Fext}}(d)\}_G$ , ainsi que le torseur de cohésion appliqué par (g) sur (d),  $\{\mathbf{T}_{C(g) \rightarrow (d)}\}_G$ . Ainsi pour la poutre complète on doit avoir annulation des résultantes sur les deux tronçons:

$$\{\mathbf{T}_{\text{Fext} \rightarrow (g)}\} + \{\mathbf{T}_{\text{Fext} \rightarrow (d)}\} = \vec{0} \quad \text{Eq. 2}$$

avec les trois conditions d'équilibre suivantes:

$$\text{pour le tronçon (g): } \{\mathbf{T}_{\text{Fext} \rightarrow (g)}\} + \{\mathbf{T}_{C(d) \rightarrow (g)}\} = \vec{0} \quad \text{Eq. 3}$$

$$\text{pour le tronçon (d): } \{\mathbf{T}_{\text{Fext} \rightarrow (d)}\} + \{\mathbf{T}_{C(g) \rightarrow (d)}\} = \vec{0} \quad \text{Eq. 4}$$

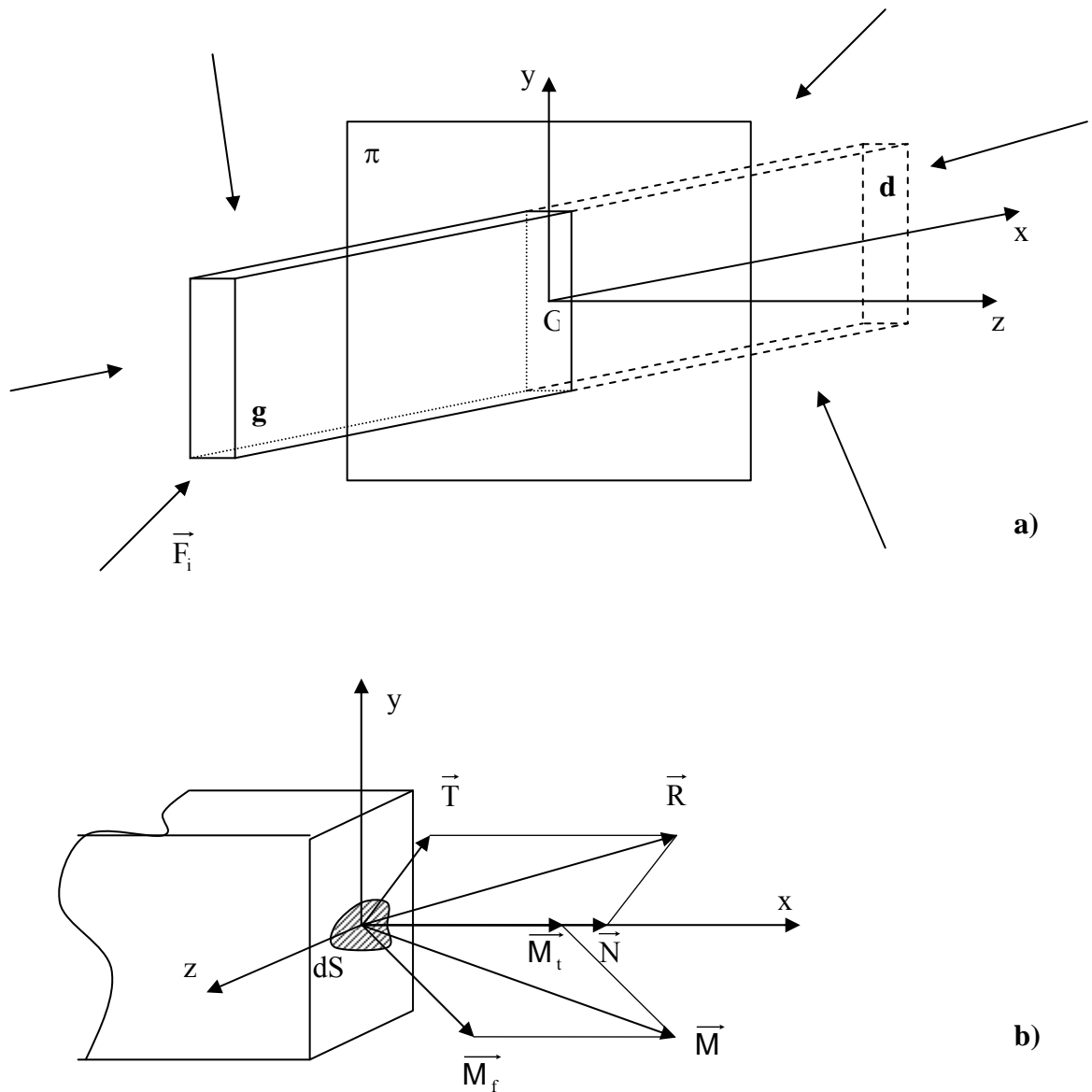
$$\text{pour la poutre complète: } \{\mathbf{T}_{C(g) \rightarrow (d)}\} = \{\mathbf{T}_{C(d) \rightarrow (g)}\} \quad \text{Eq. 5}$$

Ceci nous donne:

$$\{\mathbf{T}_{C(g) \rightarrow (d)}\} = \{\mathbf{T}_{\text{Fext} \rightarrow (g)}\} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{T}_{C(d) \rightarrow (g)}\} = \{\mathbf{T}_{\text{Fext} \rightarrow (d)}\} \quad \text{Eq. 6}$$

**Théorème:**

Le torseur de cohésion dans la section droite d'un tronçon de poutre est égal au torseur des forces extérieures appliquées à l'autre tronçon.



**Figure 3: a):** Système mécanique quelconque en équilibre statique, sectionné par le plan de coupe  $\pi$   
**b):** résultantes des forces extérieures appliquées en  $dS$  du plan  $\pi$  autour du centre de gravité  $G$ .

**2.3. Efforts appliqués à une section droite de poutre**

Le torseur  $\{T_{\text{Fext} \rightarrow (d)}\}$  se décompose en  $\vec{R}$ , résultante des forces extérieures appliquées à droite de la section  $\pi$  (Figure 3b), et  $\vec{M}$ , résultante des moments extérieurs appliqués à droite de  $\pi$ . Les efforts totaux appliqués à la section peuvent être projetés en:

Un effort normal  $\vec{N}$  selon Ox, de composante  $N_x$

Un effort de cisaillement  $\vec{T}$  dans le plan  $\pi$ , de composantes  $T_y$  et  $T_z$

Un moment de torsion  $\vec{M}_t$  projection de  $\vec{M}$  sur Ox, de composante  $M_t$

Un moment de flexion  $\vec{M}_f$  projection de  $\vec{M}$  sur  $\pi$ , de composantes  $M_y$  et  $M_z$

Dans le cas de poutres à plan neutre moyen (xOz), on aura donc  $M_x = M_y = 0$ ,  $T_z = 0$ . C'est-à-dire, pas de flexion autre qu'autour de Oz, et aucun cisaillement selon Oz.

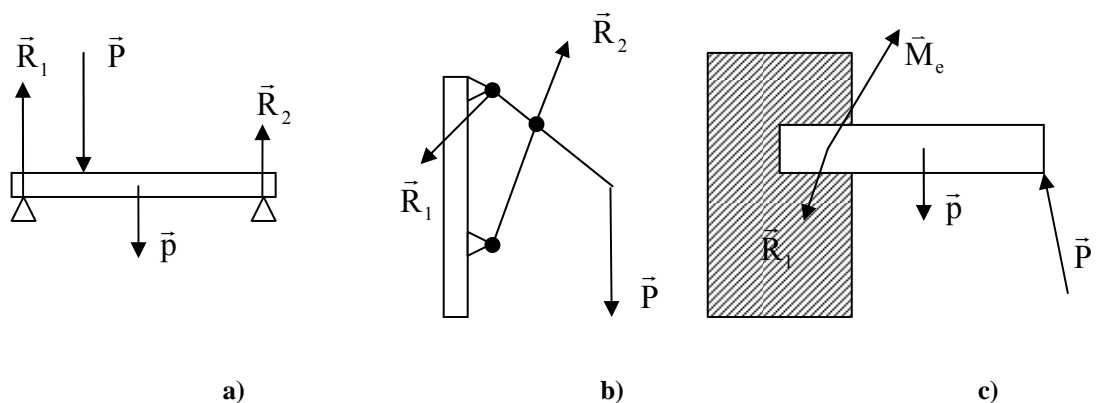
## 2.4. Réactions d'appui

Avant toute étude de résistance des matériaux, il est nécessaire de déterminer les réactions d'appuis, c'est-à-dire leur points d'applications, leur directions et leur intensités. On distinguera trois types d'appuis:

Appuis simples (Figure 4a): appuis ponctuels, de direction de réaction normale, symbolisés par le signe  $\Delta$ . Autour d'un tel appui, la poutre possède deux degrés de libertés en rotation et translation.

Appuis doubles ou articulations (Figure 4b): Le point d'application est connu, mais la direction et l'intensité de la force de réaction sont les deux inconnues. Ce type d'appuis est symbolisé par  $\odot$  ou  $\ominus$  selon le sens d'observation.

Appuis triples ou encastrement (Figure 4c): Aucun degré de liberté n'existe pour la poutre dans ce type d'appui. Les inconnues sont d'une part le moment d'encastrement  $\vec{M}_e$ , et d'autre part la réaction d'appui  $\vec{R}$ .

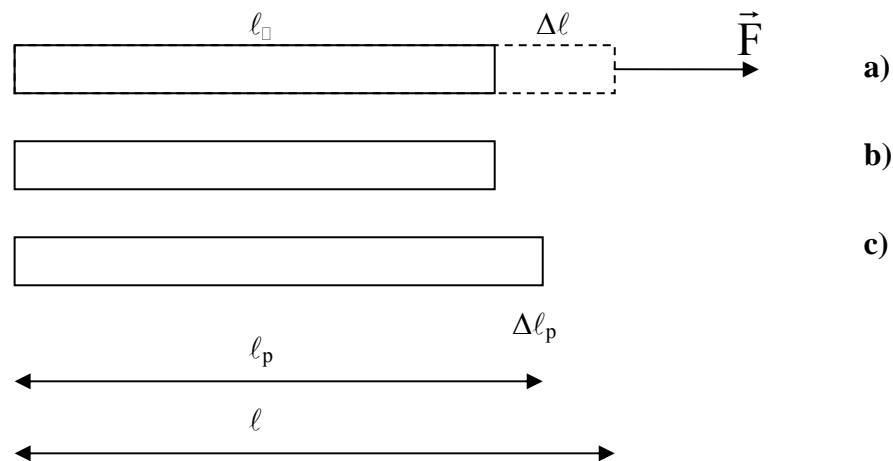


**Figure 4:** Différents types de réactions d'appuis. **a)** appuis simples, **b)** articulations, **c)** encastrement

## 3. Déformation des corps réels

### 3.1. Déformations élastique et plastique

Sous l'effet d'une force extérieure, les matériaux se déforment (Figure 5a), et deux régimes de déformation particuliers sont rencontrés. Lorsqu'après sollicitation le matériau revient dans son état initial (Figure 5b), le régime de déformation est élastique. En revanche, pour des sollicitations plus élevées, la déformation subsiste au moins partiellement après relâchement de la force (Figure 5c), et on parle de déformation plastique.



**Figure 5:** Application d'une force et déformation (a), en déformation purement élastique (b) et avec une composante de déformation plastique (c)

### 3.2. Allongement et allongement relatif

L'allongement absolu  $\Delta l$  vaut:

$$\Delta l = l - l_0 \quad \text{Eq. 7}$$

C'est cet allongement qui est accessible à l'expérience, par exemple par déformation d'un échantillon en traction pure. En revanche, comme cette valeur absolue dépend de la longueur initiale du matériau, il est commode pour pouvoir comparer des échantillons, d'introduire l'allongement relatif  $\eta$  ou déformation:

$$\eta = \Delta l / l_0 \quad \text{Eq. 8}$$

L'allongement relatif n'a donc pas d'unité.

## 4. Contraintes



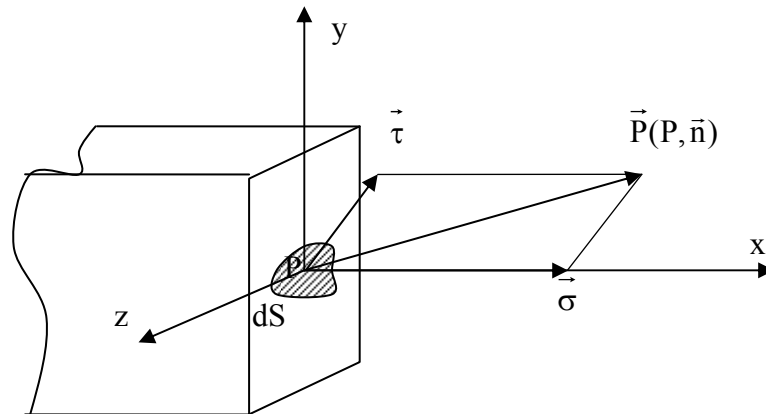
## 4.1. Définition

On appelle contrainte en un point P de normale  $\vec{n}$ , la résultante des forces  $d\vec{f}$  sur un élément de surface  $dS$  de la section droite  $\pi$  autour de P, la quantité  $\vec{P}(P, \vec{n})$  telle que (Figure 6):

$$\vec{P}(P, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{dS} \quad \text{Eq. 9}$$

La contrainte normale découlant de  $\vec{N}$  (Figure 3b), projection de  $d\vec{f}$  sur l'axe Ox, sera appelée  $\vec{\sigma}$ . La contrainte tangentielle découlant de  $\vec{T}$ , projection de  $d\vec{f}$  sur le plan  $\pi$ , sera appelée  $\vec{\tau}$ , que l'on pourra décomposer en  $\vec{\tau}_y$  et  $\vec{\tau}_z$  avec  $\vec{\tau} = \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z$ . Soit,

$$\vec{P}(P, \vec{n}) = \sigma \vec{e}_x + \tau_y \vec{e}_y + \tau_z \vec{e}_z \quad \text{Eq. 10}$$



**Figure 6:** Contraintes appliquées en P d'un élément de surface  $dS$

L'unité pour exprimer les contraintes est le Newton/m<sup>2</sup>, ou Pascal (Pa). On a ainsi:

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar} \quad 1 \text{ daN/cm}^2 = 1 \text{ bar} \quad \text{et } 1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$$

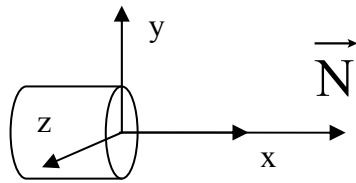
$$1 \text{ N/mm}^2 = 10^2 \text{ N/cm}^2 = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$$

## 4.2. Sollicitations simples

### 4.2.1. Définition

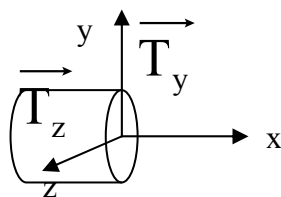
C'est une sollicitation obtenue lorsque le tenseur de cohésion possède une seule composante non nulle.

### 4.2.2. Traction et Compression simple



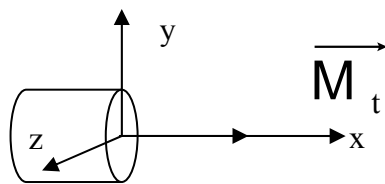
$$\{\mathbf{T}_C\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

### 4.2.3. Cisaillement simple



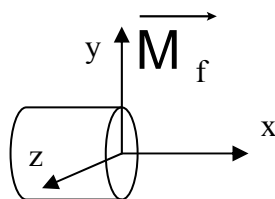
$$\{\mathbf{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ ou } \{\mathbf{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$$

### 4.2.4. Torsion simple



$$\{\mathbf{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

### 4.2.4. Flexion plane simple pure



$$\{\mathbf{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ ou } \{\mathbf{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

## 5. Traction simple

### **5.1. Définition – Hypothèses**

La poutre est soumise à 2 forces directement opposées situées dans les sections extrêmes et qui tendent à allonger la pièce (Figure 7).

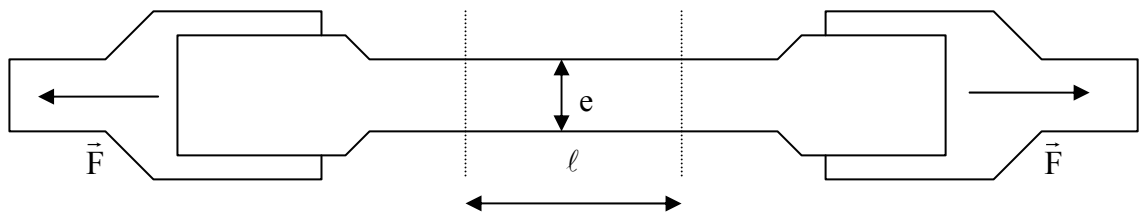
Les hypothèses de travail sont:

- une poutre rectiligne,
- des forces uniformément réparties dans les sections extrêmes,
- une section constante ou faiblement variable,
- des déformations transversales négligeables.

## 5.2. Bases expérimentales – essai de traction uniaxiale

### 5.2.1. Essai de traction uniaxiale

Le suivi de la déformation d'un solide en mode de traction simple peut être réalisé lors d'un essai de traction uniaxiale sur éprouvette normalisée (Figure 7). De telles éprouvettes sont souvent cylindriques (toutefois d'autres formes sont utilisées) et leurs extrémités permettent l'accrochage dans des mors de tirage. Les états de surface de l'éprouvette sont particulièrement contrôlés, car une trop grande rugosité de surface peut induire des propagations de fissures faussant les mesures. Le rapport des dimensions longitudinales et transverses est également important et doit respecter certaines proportions. Dans un essai de traction simple l'effort appliqué total  $\vec{F}$  est purement axial, et seule la composante normale de la contrainte est mesurée.



**Figure 7:** Essai de traction simple sur éprouvette normalisée

Sous l'effet de la force  $\vec{F}$  l'éprouvette s'allonge et on mesure  $\Delta l$  ( $\Delta l = l - l_0$ )

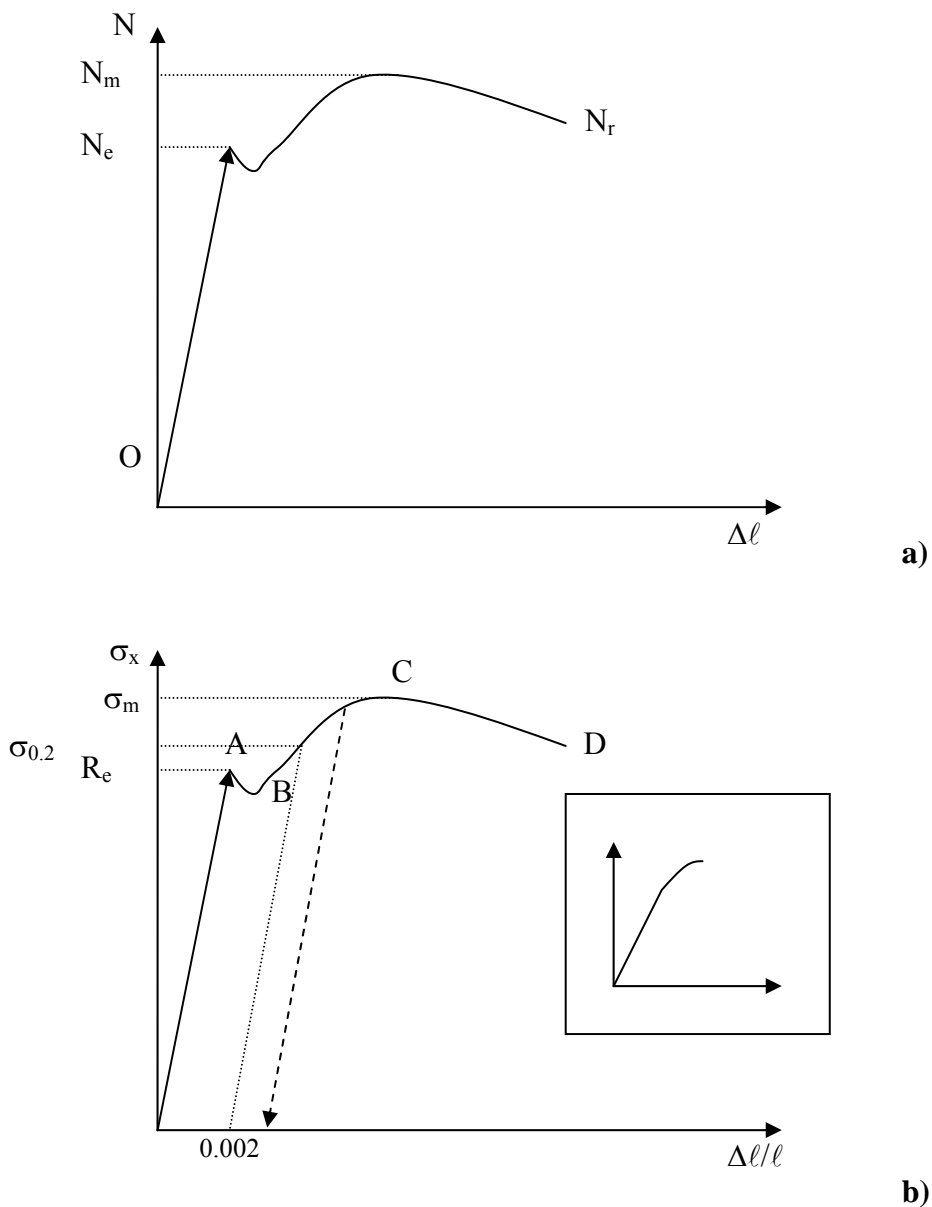
Eq. 7) par rapport à la référence initiale  $l_0$  avant traction. Le bilan des forces sur la section droite donne  $\vec{F} + \vec{N} = \vec{0}$ . La contrainte de traction s'obtient en considérant une répartition des contraintes uniforme sur la section droite:

$$\vec{N} = \int d\vec{F} = \int \vec{\sigma} dS = \vec{\sigma} \int dS = \vec{\sigma} S, \text{ soit}$$

$$\sigma = N/S$$

$$\text{Eq. 11}$$

Lors de l'essai de traction, l'effort de traction  $N$  est enregistré en fonction de l'allongement  $\Delta l$  (Figure 8a). On représente cependant plutôt la contrainte  $\sigma$  en fonction de la déformation  $\Delta l/l$ . Un diagramme contrainte – déformation type est représenté en Figure 8b. Sur ce diagramme on peut délimiter plusieurs domaines de déformation, de O à D.



**Figure 8:** a) Diagramme type effort – allongement et b) Diagramme type contrainte – déformation lors d'un essai de traction pour un matériau ductile. En insert: diagramme type pour un matériau fragile.

### 5.2.2. Module d'Young

Dans le domaine  $OA$  (Figure 8b), la déformation est élastique et il y a proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation (ou entre l'allongement et l'effort de traction), le phénomène de déformation reste réversible, et si la contrainte est relâchée l'éprouvette retrouve sa longueur initiale et  $\ell = \ell_0$ .

Le coefficient de proportionnalité  $E$  s'exprime sous la forme de la loi de Hooke (Robert Hooke 1635-1703):

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell}, \text{ ou } \sigma = E \eta \quad \text{Loi de Hooke} \quad \text{Eq. 12}$$

E est alors appelé module d'élasticité longitudinal ou module de Young (Thomas Young 1773-1829).

Ce module dépend du matériau considéré et est la pente de l'essai de traction dans le domaine élastique. On voit que l'unité de mesure de ce module est homogène à une contrainte puisque  $\eta$  est sans dimension. Des valeurs typiques de module d'Young vont de quelques MPa à quelques centaines de GPa (Table 1). Une valeur de E élevée indique une rigidité élevée du matériau (le diamant par exemple). En revanche le plomb ou l'étain sont des matériaux de rigidité faible. Pour les aciers, on atteint typiquement des modules de Young de  $2.10^5 \text{ N/mm}^2$ , soit quelques 200 GPa. Les fontes en revanche présentent des modules d'Young typiques de  $8.10^4 \text{ N/mm}^2$ , et sont moins élastiquement déformables.

### 5.2.3. Limite d'élasticité

La longueur OA du domaine élastique dépend également du matériau. La valeur  $R_e$  maximum du domaine élastique s'appelle limite élastique, au-delà de laquelle le matériau se déformera plastiquement de façon irréversible. La Table 2 répertorie les limites d'élasticité de quelques matériaux usuels.

### 5.2.4. Module d'élasticité transverse

Dans le domaine OA on observe également une diminution du diamètre e de l'éprouvette, ou striction. Cette diminution est caractérisée par une relation de proportionnalité:

$$\frac{\Delta e}{e} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad \text{Eq. 13}$$

Le coefficient de proportionnalité  $\nu$  est appelé coefficient de Poisson (Siméon Denis Poisson 1781-1840) et est sans dimension. Le signe moins dans cette équation rend compte de la diminution de diamètre lorsque la contrainte augmente.

On peut définir alors un module d'élasticité transversal G, lui aussi dépendant du matériau (G vaut typiquement  $8.10^4 \text{ Nmm}^{-2}$  pour les aciers):

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad \text{Eq. 14}$$

### 5.2.5. Zones de déformation plastique

Au-delà des petites déformations et du domaine élastique, pour de plus fortes contraintes appliquées, on observe une déformation rémanente de l'éprouvette: la courbe de décharge du matériau ne se superpose pas à la courbe de charge (pointillés de la Figure 8b).

Domaine AB: On entre dans le domaine de déformation plastique, irréversible. Sans réelle augmentation de contrainte appliquée, le matériau continue à se déformer

plastiquement. Ce domaine présente quelquefois des oscillations de  $\sigma$  correspondant à la création de fissures ou de glissements cristallins dans le matériau. Pour d'autres matériaux ce domaine apparaît comme un plateau.

Domaine BC: La contrainte appliquée participe à augmenter la déformation plastique, jusqu'à une valeur maximale  $\sigma_m$  dite contrainte maximale avant rupture.

Domaine CD: La déformation conduit progressivement à rupture pour un allongement maximum en D. On parle de contrainte à la rupture  $R_r$ .

Tous ces domaines sont variables selon les matériaux et leurs modes d'élaboration.

**Remarques:**

- Il ne faut pas confondre rigidité et raideur. La rigidité caractérise un matériau, la raideur une construction mécanique. On peut ainsi avoir une pièce massive en plastique possédant une raideur bien plus élevée qu'un ressort en acier !

- On rencontrera la limite élastique  $\sigma_{0.2}$  dans la littérature. Très utilisée en métallurgie, elle correspond à la transition élastique-plastique qui est assez floue. Il s'agit de la valeur de la contrainte qui laisse 0.2% de déformation plastique lorsqu'elle est retirée (Figure 8b).

- Il n'est pas rare de rencontrer un matériau qui casse lors d'un essai de traction avant d'atteindre le régime plastique de déformation. Ceci est généralement dû à des facteurs extrinsèques comme la présence de fissures, et se rencontre surtout dans des matériaux rigides. C'est par exemple le cas du béton fibré à ultra haute performance, qui malgré un module d'Young élevé (50 GPa typiquement), possède une résistance à la traction de seulement 8 MPa environ.

- On peut distinguer deux grandes catégories de matériaux selon leur courbe de déformation en traction simple. Les matériaux dits ductiles donneront lieu à des courbes  $\sigma(\eta)$  telles que celle de la Figure 8b, alors que les matériaux dits fragiles, montreront des courbes de déformation sans zone de déformation plastique (insert Figure 8b).

Matériaux	Module d'Young (GPa)
<i>Eléments purs</i>	
Ag	83
Al	69
As	8
Au	78

Ba	13
Be	240
Bi	32
Cd	50
Co	209
Cr	289
Cs	1.7

Cu	124	Zr	68
Fe	196	<i>Alliages</i>	
Ge	89.6	Acier de construction	210
In	110	Acier à ressorts	220
Ir	528	Acier inoxydable 18-10	203
Li	4.9	Bronze (Cu 9 à 12% Sn)	124
Mg	45	Bronze au Béryllium	130
Mn	198	Cuivre laminé U4 (Recuit)	90
Mo	329	Cuivre laminé U4 (Écroui dur)	150
Na	10	Duralumin AU4G	75
Nb	105	Fontes	83 à 170
Ni	214	Hastelloy B2 (Ni + Mo)	217
Pb	18	Hastelloy C 2000 (Ni + Cr + Mo)	206
Pd	121	Inconel X-750 (Ni + Cr + Fe)	212 à 218
Pt	168	Invar	140
Pu	96	Monel 400 (Ni + Cu)	173
Rb	2.4	Nimonic 90 (Ni + Cr + Co)	213 à 240
Rh	275	Nispan (Ni + Cr + Ti)	165 à 200
Ru	447	Phynox (Co + Cr + Ni + Mo)	203
Sc	74	<i>Verres, céramiques, oxydes, carbures métalliques, minéraux</i>	
Se	10	AsGa	85.5
Sn	41.		
Ta	186		
Ti	116		
W	406		
U	208		
V	128		
Zn	78		

Béton	27	Contreplaqué glaw	12.4
Brique	14	Épicéa	13
Calcaire (CaCO <sub>3</sub> , pierres)	20 à 70	Érable	10
Cr <sub>3</sub> C <sub>2</sub>	373.13	Frêne	10
SiC	450	Papier	3 à 4
TiC	440	Séquoia	9.5
WC	650	* Il faut tenir compte que le module d'Young du bois peut varier beaucoup en fonction de l'humidité, de la densité, de la longueur des fibres et d'autres caractéristiques.	
Diamant	1 000	<b>Polymères, fibres ...</b>	
Graphite	30	caoutchoucs	0.0007 à 4
Granite	60	Fibre de carbone	190
Marbre	26	Kevlar	34.5
Mullite Al <sub>6</sub> Si <sub>2</sub> O <sub>13</sub>	145	Nanotubes (Carbone)	1100
Alumine α-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	390	Nylon	2 à 4
BeO	30	Plexiglas	2.4
MgO	250	Polyamide	3 à 5
ZrO	200	Polycarbonate	2.3
Saphir	420	Polyéthylène	0.2 à 0.7
Silice (SiO <sub>2</sub> )	107	Polystyrène	3 à 3.4
Ti <sub>3</sub> Al	140	Résines époxy	3.5
BaTiO <sub>3</sub>	67	<b>Biomatériaux</b>	
Verre	69	Cartilage	0.024
<b>Bois *</b>		Cheveux	10
Acajou (Afrique)	12	Collagène	0.006
Bambou	20	Fémur	17.2
Bois de rose (Brésil)	16	Humérus	17.2
Bois de rose (Inde)	12	Radius	18.6
Chêne	12		



		<b>Table 1:</b> Modules d'Young de différents éléments pur, et matériaux
Soie d'araignée	60	
Tibia	18.1	
Vertèbre cervicale	0.23	
Vertèbre lombaire	0.16	

<b>Matière</b>	<b>Nuance</b>	<b>R<sub>e</sub> [MPa]</b>
Bois		≈ 10
Aluminium	EN AC-AISi12Cu	180 à 240
Acier de construction usuel non allié	S235 à S355	235 à 355
Acier pour trempe	C 30 (XC30)	350 à 400
Acier faiblement allié	30 Cr Ni Mo 16 (30 CND 8)	700 à 1450

**Table 2:** limites d'élasticités de matériaux usuels. Attention, R<sub>e</sub> est donnée en MPa

### 5.3. Conditions de Résistance des Matériaux

#### 5.3.1. Situation classique

La contrainte appliquée sur le matériau doit impérativement rester inférieure à la limite pratique à l'extension du matériau, R<sub>pe</sub>. Cette limite pratique prend en compte, pour des raisons de sécurité bien compréhensibles, différents aléas inhérents aux matériaux et sollicitations appliquées, via un coefficient de sécurité s:

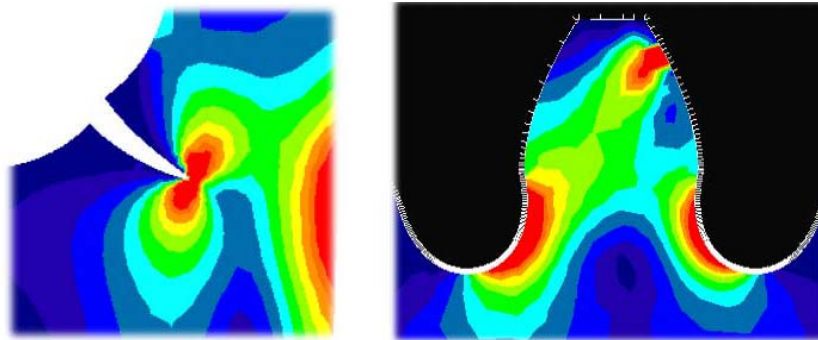
$$\sigma \leq R_{pe} \quad \text{avec} \quad R_{pe} = \frac{R_e}{s} \quad \text{Eq. 15}$$

Le coefficient s traduit les incertitudes et le type de construction réalisée.

#### 5.3.2. Concentrations de contraintes

S'il y a variation brusque de section (Figure 9), une des hypothèses de base de la RdM n'est plus vérifiée à proximité de cette variation de section. La contrainte ne varie plus lentement, on doit appliquer un coefficient de concentration de contrainte, k, et la condition de résistance devient:

$$\sigma_M \leq R_{pe} \quad \text{avec} \quad \sigma_M = k\sigma \quad \text{Eq. 16}$$



**Figure 9:** Cartographie de répartitions de contraintes autour **a)** d'une fissure et autour **b)** d'une dent d'engrenage. Les contraintes sont représentées croissantes du bleu vers le rouge

## 6. Compression simple

### 6.1. Définition – Hypothèses

Une poutre est soumise à un régime de compression simple si on applique à ses extrémités 2 forces directement opposées qui tendent à la raccourcir.

La principale hypothèse de travail est la condition de non-flambage:

$$\ell_0 < 8e \quad \text{Eq. 17}$$

Où  $e$  est la plus petite dimension transverse de la poutre.

### 6.2. Déformations et contraintes

Les équations de la traction simple restent valables. En revanche, selon le matériau, les limites élastiques pour la compression et pour la traction diffèrent notablement. Pour les aciers,  $R_e$  est identique en compression et en traction. Par contre, pour d'autres matériaux comme la fonte et le béton par exemple, on doit différencier les régimes de traction et compression. On appellera les valeurs correspondantes de limites élastiques  $R_{et}$  et  $R_{ec}$  respectivement pour ces matériaux:

Fontes:  $R_{et} \approx 20 \text{ Nmm}^{-2}$

$$R_{ec} \approx 150 \text{ Nmm}^{-2}$$

Bétons (non armé):  $R_{et} \approx 1 \text{ Nmm}^{-2}$

$$R_{ec} \approx 10 \text{ Nmm}^{-2}$$

### 6.3. Conditions de Résistance

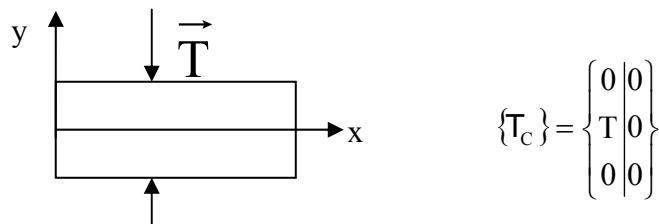
La condition de résistance s'exprimera alors en compression par la limite pratique à la compression du matériau,  $R_{pc}$ :

$$\sigma \leq R_{pc} \quad \text{avec} \quad R_{pc} = \frac{R_{ec}}{S} \quad \text{Eq. 18}$$

## 7. Cisaillement simple

### 7.1. Définition – Hypothèses

Une poutre est soumise à un régime de cisaillement simple (Figure 10) lorsqu'on lui applique 2 forces directement opposées dans un plan de section droite.



**Figure 10:** Effort de cisaillement simple appliqué à une poutre, et torseur correspondant

L'hypothèse principale de travail est que les efforts de cisaillement sont considérés parfaitement localisés dans le plan de cisaillement. On ne tiendra pas compte du fait que de manière pratique il est impossible de réaliser un cisaillement parfait (les efforts de part et d'autre de la poutre ne sont pas parfaitement alignés, par exemple dans un encastrement), et que donc un petit moment de flexion est engendré proche du plan de cisaillement.

### 7.2. Essai de cisaillement simple

Une poutre est cisailée par l'application de deux efforts opposés parallèles à sa section droite (Figure 11). L'essai de cisaillement fournit une courbe similaire à celle de l'essai de traction, avec une zone de déformation de cisaillement élastique et une zone de déformation plastique. On remplacera alors les valeurs de  $R_e$  et  $R_r$  par:

$R_{eg} = T_e / S$ : résistance élastique au glissement

$R_{rg} = T_r / S$ : résistance à la rupture au glissement

Où  $T_e$  et  $T_r$  sont les équivalents de  $N_e$  et  $N_r$  respectivement sur la courbe de traction effort – allongement. On observe pour les aciers en général que  $R_{eg} \approx R_e / 2$ .

La contrainte moyenne de cisaillement vaut:

$$\tau = \frac{T}{S} \quad \text{Eq. 19}$$

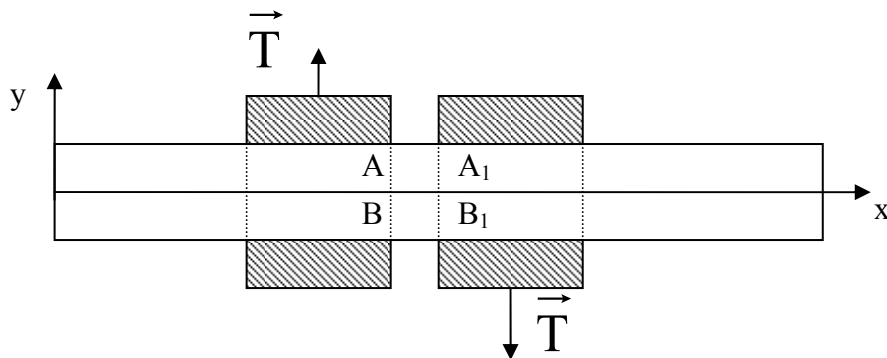
Le glissement est relié au module d'élasticité transversal  $G$  et à l'angle de glissement unitaire  $\gamma$  (Figure 11b) par:

$$\tau = G\gamma \quad \text{Eq. 20}$$

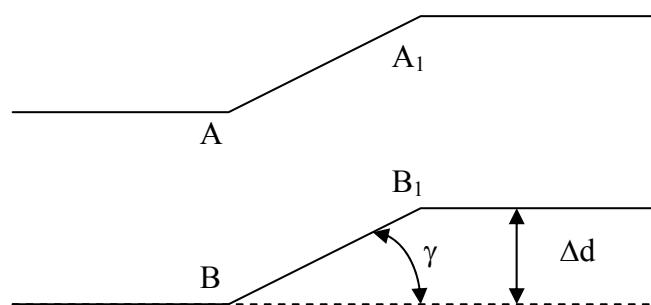
Dans la zone élastique la déformation est de nouveau proportionnelle à l'effort de cisaillement et on peut appliquer la loi de Hooke:

$$T = C\Delta d \quad \text{Eq. 21}$$

Où  $C$  est le coefficient de proportionnalité.



a)



b)

**Figure 11:** a) Dispositif d'essai de cisaillement simple. Les distances  $AA_1$  et  $BB_1$  ont été volontairement agrandies pour raison de compréhension b) Agrandissement de la zone déformée  $AA_1BB_1$ .

### 7.3. Conditions de Résistance des Matériaux

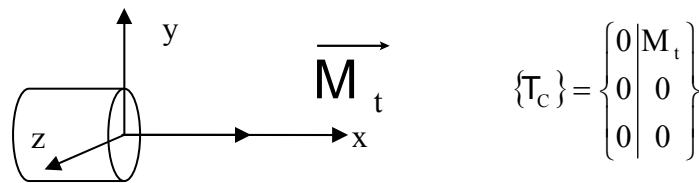
Similairement à la traction on définit la limite pratique au glissement du matériau,  $R_{pg}$ , et un coefficient de sécurité un coefficient de sécurité  $s$ :

$$\tau \leq R_{pg} \quad \text{avec} \quad R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} \quad \text{Eq. 22}$$

## 8. Torsion simple

### 8.1. Définition – Hypothèses

Une poutre est soumise à un régime de torsion simple (Figure 12) lorsqu'elle est soumise à ses extrémités à un moment porté par l'axe de symétrie de la poutre (encastrement par exemple). Les formules de la torsion simple ne sont valables que pour des poutres de révolution (section de poutre circulaire). On néglige le poids de la poutre.



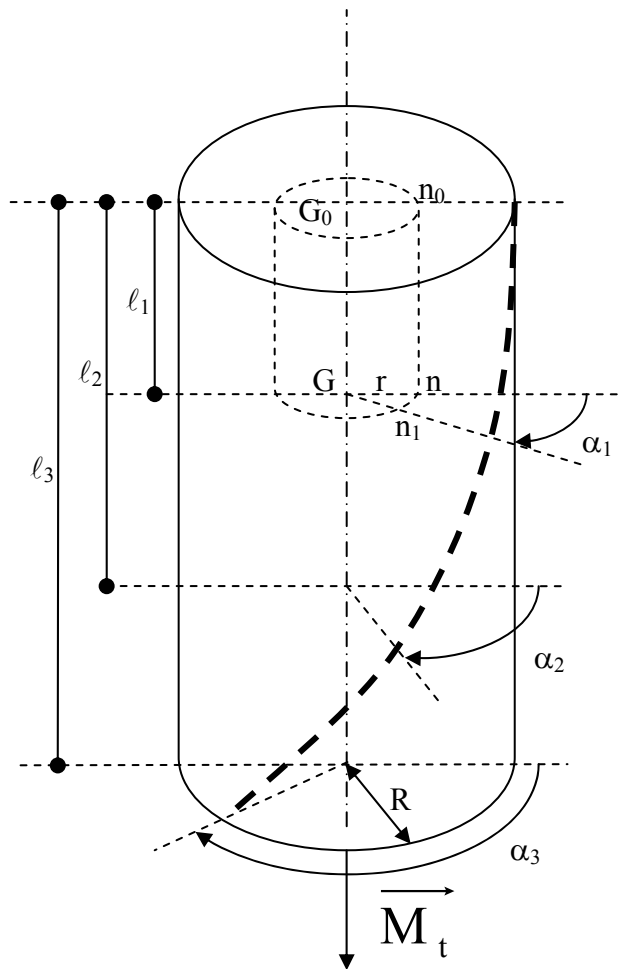
**Figure 12:** Effort de torsion simple appliqué à une poutre, et torseur correspondant

### 8.2. Essai de torsion

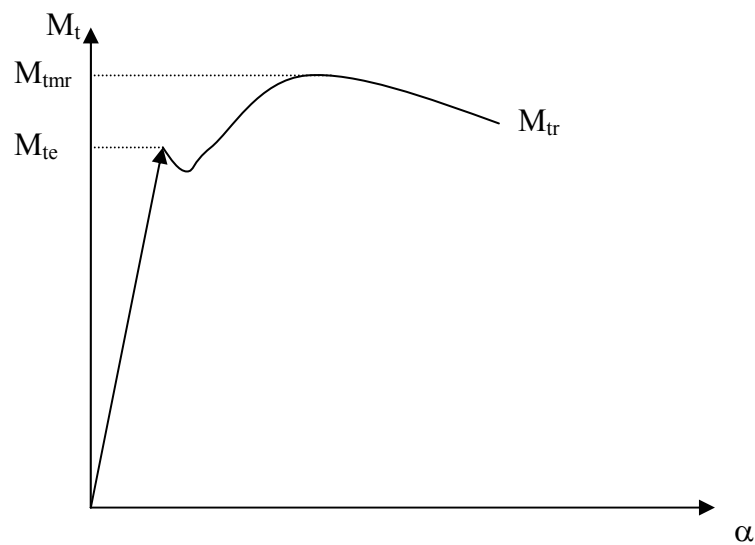
La Figure 13a représente un essai de torsion simple. Une génératrice du cylindre est déformée (ligne pointillés forts) par application de  $M_t$ . Le déplacement angulaire  $\alpha_i$  est suivi en fonction de la distance  $\ell_i$  au plan de base du cylindre. On constate expérimentalement que:

$$\alpha_1/\ell_1 = \alpha_2/\ell_2 = \alpha_3/\ell_3 = \theta \text{ (unité: radian/m)}$$

où  $\theta$  est l'angle de déformation unitaire. On enregistre le diagramme  $M_t - \alpha$  (Figure 13b) qui donne également une courbe d'allure similaire à celle de l'essai de traction.



a)



b)

**Figure 13:** a) Essai de torsion simple appliqué à une poutre cylindrique, et b) diagramme  $M_t - \alpha$  correspondant

### 8.3. Contraintes tangentielles

Le tronçon élémentaire de cylindre  $G_0G$  est en équilibre sous l'effet du moment de torsion appliqué  $\vec{M}_t$  et des forces de cohésion  $\vec{f}$ . La déformation de torsion simple du tronçon  $G_0G$  correspond à l'arc  $nn_1$ , à la distance  $\ell_1$  de  $G_0$ . Pour un point  $n$  à une distance  $r$  de l'axe de révolution, on a:

$$nn_1 = r \alpha_1$$

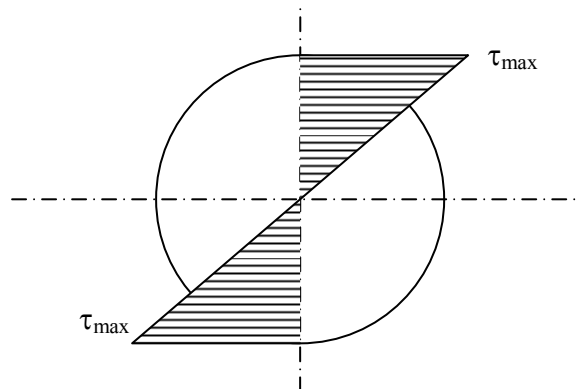
$$\text{soit avec } G_0G = \ell_1, \text{ et } \gamma = nn_1 / G_0G = r \alpha_1 / \ell_1 = r\theta$$

un régime de contraintes tangentielles selon la loi de Hooke  $\tau = G\gamma$  Eq. 20):

$$\tau = Gr\theta \quad \text{Eq. 23}$$

Cette équation nous donne une répartition de contraintes tangentielles (Figure 14) linéaire avec la distance à l'axe de révolution, et qui est maximum pour:

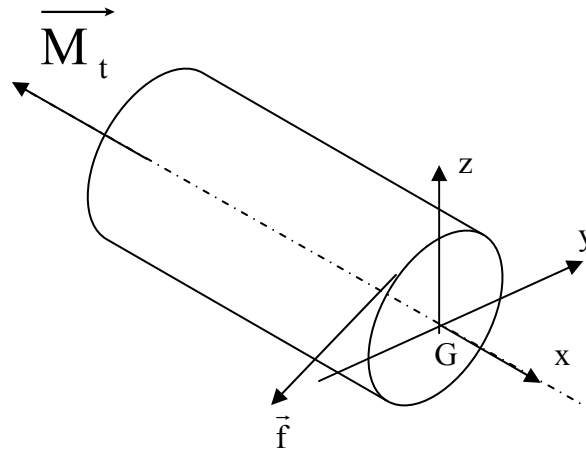
$$\tau_{\max} = GR\theta \quad \text{Eq. 24}$$



**Figure 14:** Diagramme de répartition de la contrainte tangentielle sur la section droite du cylindre en régime de torsion simple

### 8.4. Equation de déformation élastique, module de torsion

Réécrivons les conditions d'équilibre du tronçon  $G_0G$  (Figure 15) sous l'effet de  $\vec{M}_t$  et des forces de cohésion  $\vec{f}$ :



**Figure 15:** Tronçon de poutre cylindrique en torsion simple, en équilibre sous l'effet du moment de torsion et de la résultante des forces de cohésion.

$$\sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow S) \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$-M_t + \sum_S r \vec{f} \cdot \vec{e}_x = 0 \quad \text{soit} \quad M_t = \sum_S r f$$

or  $\tau = f/ds = Gr\theta$ , soit

$$f = Gr\theta ds$$

et en remplaçant dans la valeur de  $M_t$ :

$$M_t = \sum_S Gr^2\theta ds$$

$$= G\theta \sum_S r^2 ds \quad \text{avec} \quad \sum_S r^2 ds = I_{Gx} = I_0 \quad (\text{moment quadratique}$$

polaire)

$$= G\theta I_0$$

On peut aussi exprimer  $M_t$  en fonction de la contrainte de cisaillement, puisque:

$$\tau = Gr\theta$$

$$M_t = \tau I_0 / r$$

ou

$$\tau = \frac{M_t}{(I_0 / r)}$$

Eq. 25

Dans cette équation le rapport  $(I_0/r)$  est le module de torsion. Son unité est le  $m^3$ .

### 8.5. Contrainte maximale

La contrainte maximale appliquée à la poutre est donnée pour  $r = R$ , soit:



$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{(I_0/R)} \quad \text{Eq. 26}$$

avec par exemple, pour un cylindre plein, le moment quadratique  $I_0 = \pi D^4/32$ . Comme  $R = D/2$ , le module de torsion  $I_0/R = \pi R^3/16$ .

## 8.6. Condition de résistance

La contrainte maximale ne doit pas dépasser la limite élastique pratique au cisaillement, soit:

$$\tau_{\max} \leq R_{pg} \Leftrightarrow \frac{M_t}{(I_0/R)} \leq \frac{R_{eg}}{s} \quad \text{Eq. 27}$$

Si le cylindre utilisé pour transmettre le mouvement possède des cannelures, rainures, épaulements, goupilles ..., il sera nécessaire comme dans le cas de la traction simple, d'introduire un coefficient de concentrations de contraintes.

## 8.7. Condition de rigidité

Pour les systèmes de transmission qui tournent vite (typiquement avec des vitesses de rotation supérieures à 750 tr/min), on doit limiter les déformations de torsion du cylindre de transmission pour éviter les vibrations.

Pour assurer une rigidité convenable de la transmission, on impose une limite à l'angle unitaire de torsion:

$$\theta \leq \theta_{\text{lim}} \Leftrightarrow \theta = \frac{M_t}{(GI_0)} \leq \theta_{\text{lim}} \quad \text{Eq. 28}$$

## 9. Flexion plane simple

### 9.1. Définition – Hypothèses

#### 9.1.1. Les différents types de flexion

Selon la nature du torseur de cohésion on distingue plusieurs types de flexions. Ceux-ci dépendent entre autres de la nature de la poutre, des configurations des actions mécaniques extérieures appliquées ...

Flexion pure:

$$\{\mathbf{T}_C\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Flexion plane ou composée:} \quad \{T_C\} = \left\{ \begin{array}{c|c} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c|c} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{array} \right\}$$

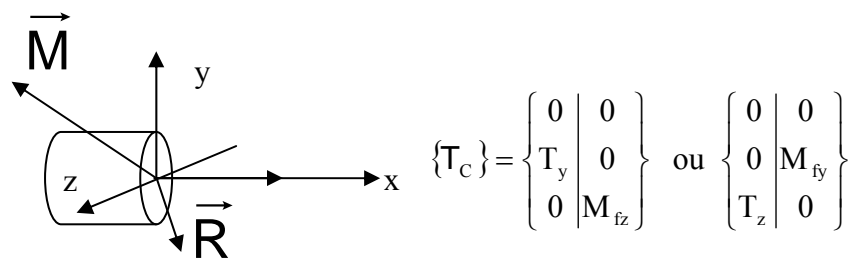
$$\text{Flexion plane simple:} \quad \{T_C\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Flexion déviée:} \quad \{T_C\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}$$

Le régime de flexion plane simple sera étudié ici, car il correspond au cas le plus fréquemment rencontré.

### 9.1.2. Flexion plane simple

Une poutre est dite soumise à un régime de flexion plane (Figure 16) si la réduction au centre de gravité d'une section droite des forces extérieures situées d'un même côté se réduit à un moment ainsi qu'à une résultante tous deux situés dans le plan de la section droite.



**Figure 16:** Effort de flexion plane appliqué à une poutre, et torseur de cohésion correspondant

A toutes les hypothèses générales de la RdM, il faut rajouter pour la flexion plane le fait que:

- la fibre moyenne de la poutre doit être rectiligne
- la poutre devra posséder impérativement un plan de symétrie contenant les forces extérieures.

## **9.2. Equation fondamentale de la flexion**

### 9.2.1. Essai de flexion plane simple

Cet essai consiste à mesurer les déformations de flexion d'une poutre lorsqu'on lui applique une force  $\vec{F}$  dont on peut modifier l'intensité, la répartition et le point d'application (Figure 17). Sur le flanc d'une section droite ( $\Sigma$ ) de la poutre, on place des jauges (dispositif

extensométrique) permettant de mesurer les variations de longueur relative  $\Delta \ell$  des portions de fibres sur lesquelles elles s'appliquent. On place aussi un comparateur permettant de mesurer la déformation de la fibre moyenne, ou flèche.

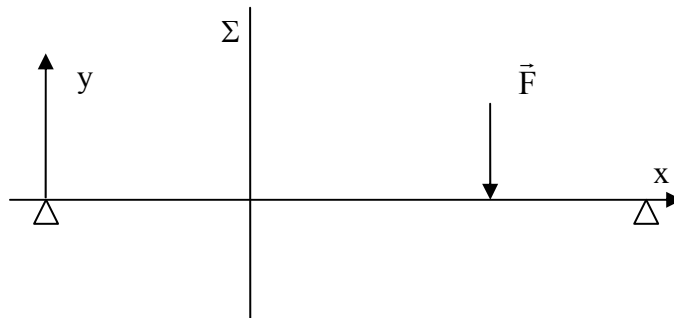


Figure 17: Poutre en appui soumise à l'action d'une force verticale

**9.2.2. Relation entre  $\vec{T}$  et  $\vec{M}_f$**

Soit une poutre en appui à laquelle est appliquée une charge variable avec  $x$ ,  $p(x)$ , (Figure 18) et deux sections parallèles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  distantes de  $dx$ . A gauche de  $\Sigma$  l'effort de cisaillement est  $T(x)$  et le moment de flexion  $M_f(x)$ . A droite de  $\Sigma'$  ces deux composantes deviennent  $T(x) + dT(x)$  et  $M_f(x) + dM_f(x)$  respectivement.

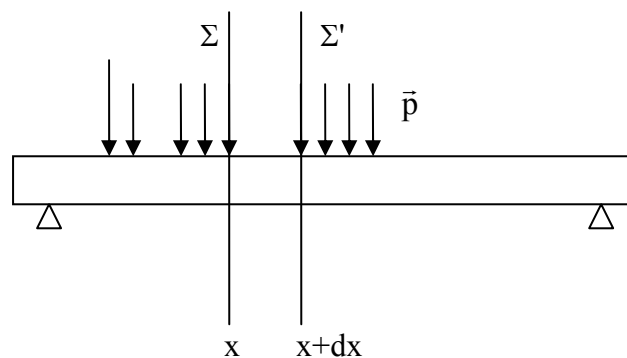


Figure 18: Poutre soumise à l'action d'une force verticale uniforme

Or:  $T(x) + dT(x) = T(x) - p(x)dx$ , soit

$$-p(x) = \frac{dT(x)}{dx} \tag{Eq. 29}$$

D'après cette équation, si  $p = 0$ , on obtient  $T = cte$ , et si  $p = cte$ ,  $T = -px + cte$ .

D'autre part  $M_f(x) + dM_f(x) = M_f(x) + T(x)dx - p(x)dx \cdot dx/2$ , soit en négligeant le deuxième ordre en  $dx$ :

$$T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx} \quad \text{Eq. 30}$$

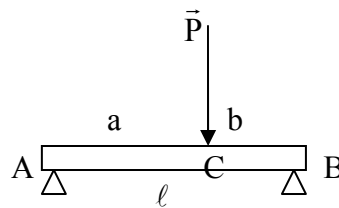
Et par conséquent, l'effort de cisaillement peut être associé à la pente de l'évolution du moment de flexion avec  $x$ . Des deux équations précédentes on tire:

$$\frac{d^2M_f(x)}{dx^2} = -p(x) \quad \text{Eq. 31}$$

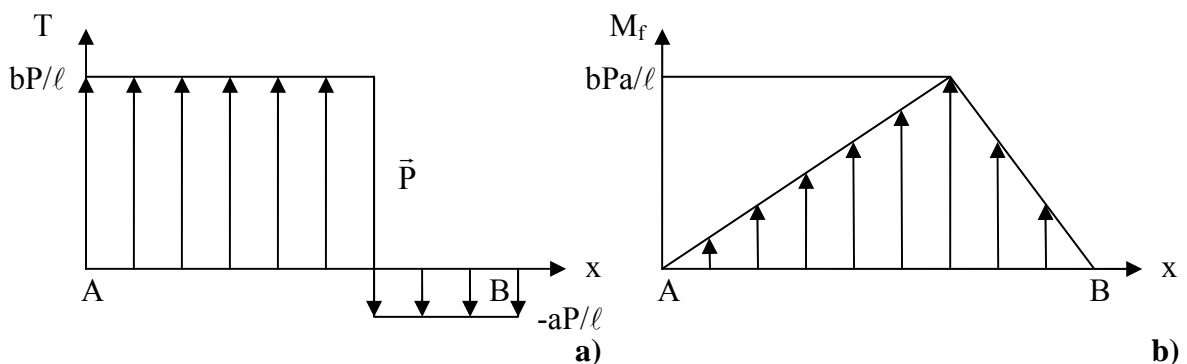
### 9.2.3. Diagrammes $\vec{T}$ et $\vec{M}_f$

Il est souvent très utile de suivre l'évolution des sollicitations le long de la poutre, pour évaluer si les dimensionnements respectent les limites élastiques. Il est alors commode de représenter les diagrammes de sollicitations en cisaillement et flexion pour estimer les lieux de contraintes élevées d'une structure donnée. Nous allons établir ces diagrammes dans le cas de structures simples, pour des poutres chargées.

#### 9.2.3.1. Poutre en appui simple soumise à une seule force verticale



On obtient rapidement que  $P = R_A + R_B$ , et comme  $-aP + (a+b)R_B = 0$ , on a  $R_B = aP/l$  et  $R_A = bP/l$ . Il suit le diagramme en cisaillement de la (Figure 19a).



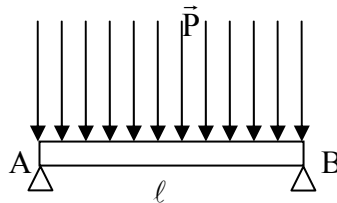
**Figure 19:** Diagramme en cisaillement (a) et moment de flexion (b) pour une poutre sur deux appuis simples.

D'autre part (Figure 19b):

- sur le tronçon AC, l'effort de cisaillement est  $T = bP/\ell$ . On a alors  $M_f(x) = -Pbx/\ell + cte$ . Comme en  $x=0$ ,  $M_f = 0$  (la rotation est libre en appui simple), la constante s'annule et  $M_f(x) = -Pbx/\ell$ .

- sur le tronçon CB,  $T = bP/\ell - P$  et on a alors  $M_f(x) = -Pbx/\ell + Px + cte$ . Comme en  $x=\ell$ ,  $M_f = 0$ , on a  $cte = -P\ell + Pb$  et  $M_f(x) = Px(1-b/\ell) + P(b-\ell)$ .

**9.2.3.2. Poutre en appui soumise à une force verticale répartie**



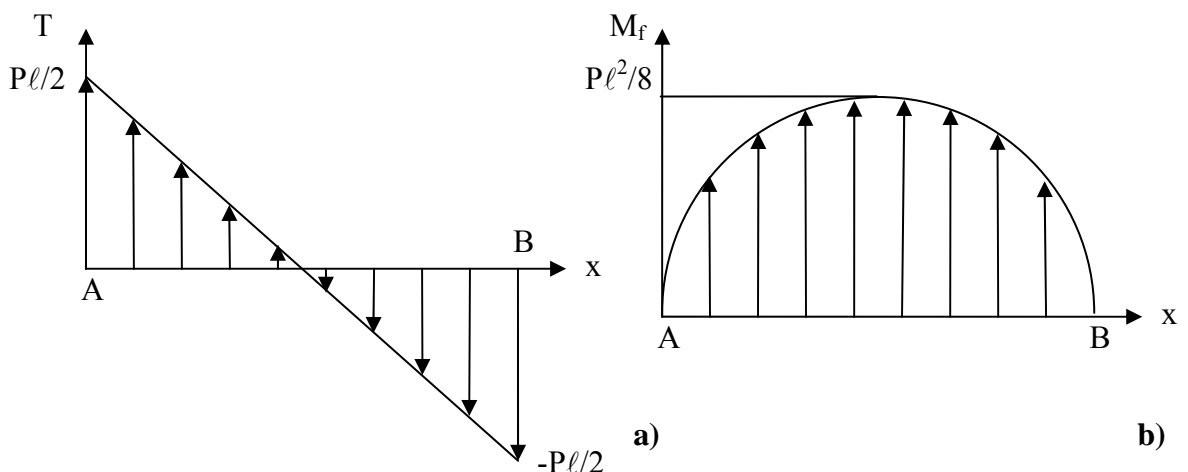
Comme  $\vec{P} = -P(x)\vec{e}_y$  avec  $P(x) = cte$ , on obtient  $P = \int P(x)dx = P\int dx = P\ell$ . Avec  $P = R_A$

+  $R_B$ , on obtient  $R_A = R_B = P\ell/2$ . L'Eq. 30 nous donne alors  $T = -Px + cte$ , et comme en  $x = 0$  on a  $T = P\ell/2$ ,  $cte = P\ell/2$ . On a donc  $T = P\ell/2 - Px$  (Figure 20a).

$$T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx}$$

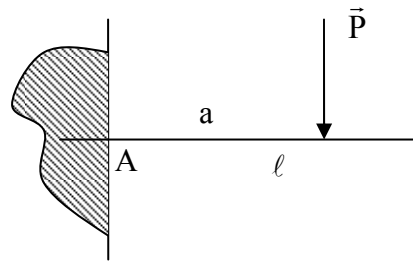
$$T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx}$$

On obtient par l'Eq. 30 le moment de flexion:  $M_f(x) = P\ell x/2 - Px^2/2 + cte$ . Comme en  $x=0$ ,  $M_f = 0$ , la constante s'annule et  $M_f(x) = P\ell x/2 - Px^2/2$ . C'est l'équation d'une parabole. On remarque que  $T = 0$  pour  $x = \ell/2$ , donc  $M_f(x)$  passe par un optimum en ce point et vaut  $M_f(x) = P\ell^2/8$ . C'est donc un maximum. En  $x = \ell$ ,  $M_f(x) = 0$  (Figure 20b).

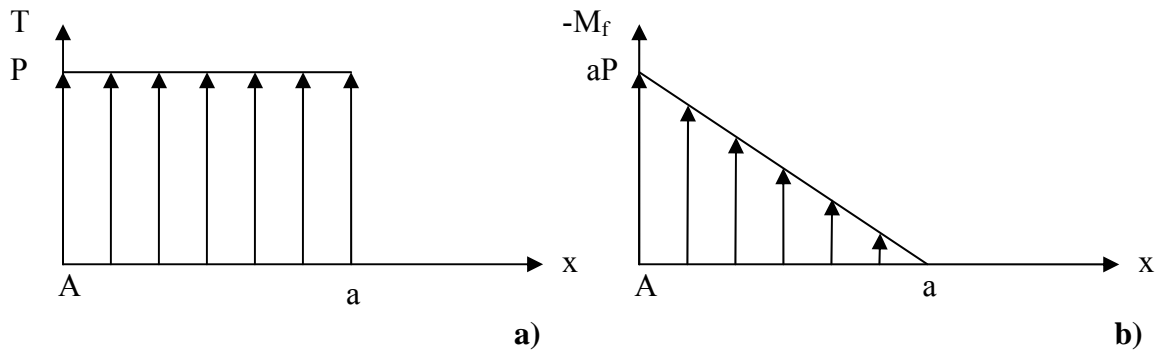


**Figure 20:** Diagramme en cisaillement (a) et moment de flexion (b) pour une poutre sur deux appuis simples chargée par une force répartie.

**9.2.3.3. Poutre encastrée à une extrémité**

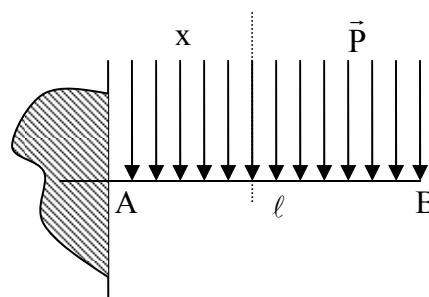


On a rapidement  $R_A = P$  et  $M_{eA} = - aP$ , et donc les diagrammes correspondants (Figure 21).

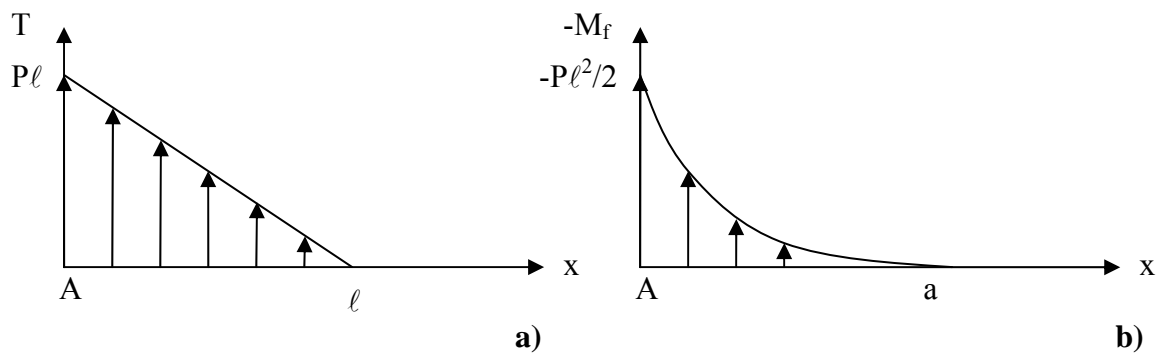


**Figure 21:** Diagramme en cisaillement (a) et moment de flexion (b) pour une poutre encastrée.

**9.2.3.4. Poutre encastrée soumise à une force répartie:**

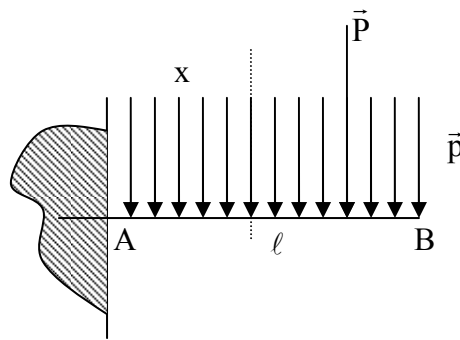


On a  $T = P\ell - Px = P(\ell - x)$  (Figure 22a), et donc  $M_f = P\ell x - px^2/2 + cte$ . Or en  $x = 0$ ,  $M_f = - P\ell^2/2$ , et par conséquent,  $M_f = P\ell x - px^2/2 - P\ell^2/2 = -P(\ell - x)^2/2$  (Figure 22b).

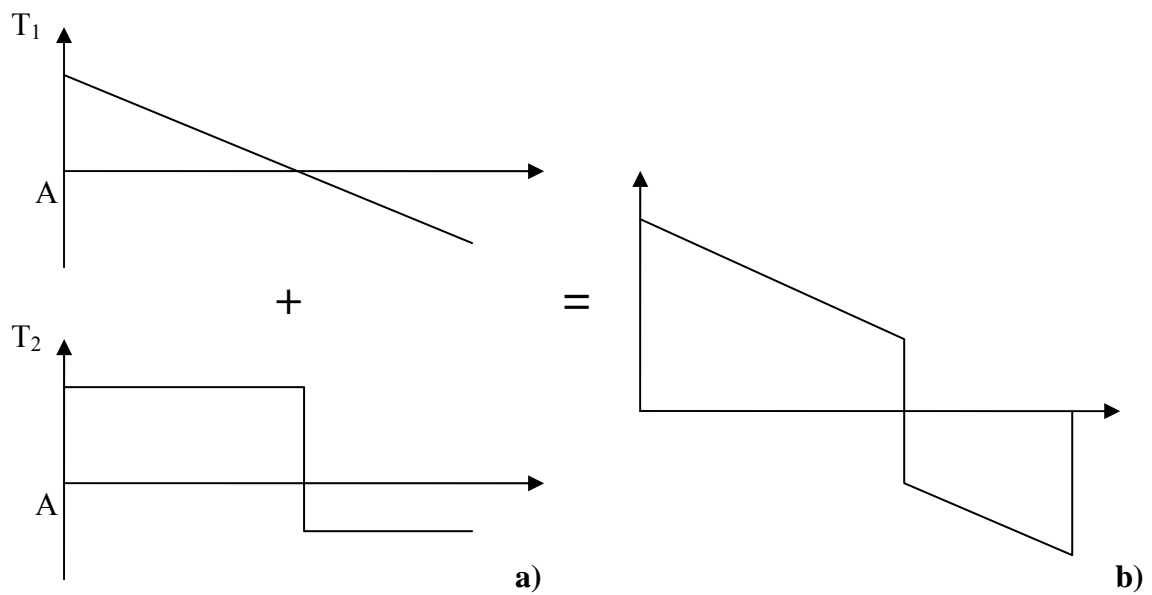


**Figure 22:** Diagramme en cisaillement (a) et moment de flexion (b) pour une poutre encastree avec charge repartie.

### 9.2.3.5. Superposition des effets



On a alors composition des forces precedentes, et les diagrammes peuvent être obtenus directement par sommation des diagrammes individuels (Figure 23).



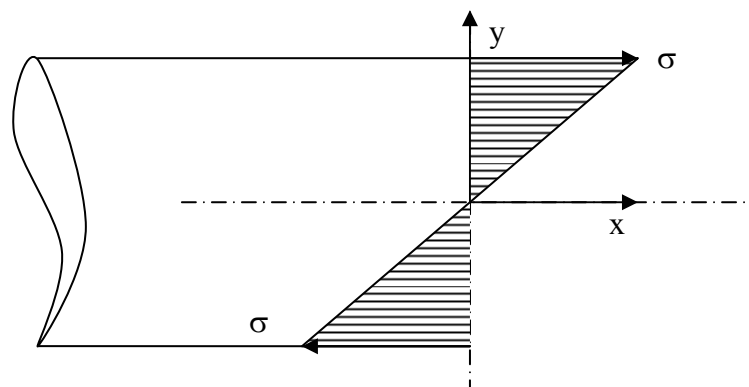
**Figure 23:** Diagrammes en cisaillement pour deux poutres chargées avec une charge répartie (haut) et localisée (bas) (a) et diagramme de cisaillement pour une charge composée des charges précédentes (b).

### 9.3. Expression des contraintes en fonction de $M_f$

#### 9.3.1. Contraintes normales

Lors de la sollicitation de flexion plane simple, la force élémentaire  $\vec{df}$  sur un élément de surface  $dS$  est parallèle à l'axe  $Ox$  et dépend de la distance à la fibre moyenne (Figure 24) selon l'équation:

$$\vec{df} = \sigma dS \vec{e}_x$$



**Figure 24:** Répartition de la contrainte normale sur la section droite d'une poutre soumise à une sollicitation de flexion plane simple le long de l'axe  $Oy$ .



On obtient par conséquent pour le moment de flexion:

$$M_f = \int_S ydf = \int_S y\sigma dS$$

Comme on peut écrire  $\sigma = ky$  avec  $k = \text{constante}$ , on obtient:

$$M_f = \int_S ky^2 dS = k \int_S y^2 dS = kI_{Gz}, \text{ ou encore:}$$

$$\sigma = \frac{yM_f}{I_{Gz}} \quad \text{ou} \quad M_f = \frac{\sigma}{y} I_{Gz} \quad \text{Eq. 32}$$

avec  $I_{Gz}/y$  module de flexion, dont l'unité est le  $m^3$ .  $I_{Gz}$  est le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe principal  $Gz$  ( $G$ : centre géométrique de la section droite). L'unité de  $I_{Gz}$  est le  $m^4$ .

On remarque la forte similitude de la forme de ces équations avec celles obtenues pour le régime de torsion simple.

### **9.3.1. Contraintes tangentielles**

Dans une poutre sollicitée en flexion plane simple les contraintes tangentielles s'expriment de la façon suivante:

$$\tau = \frac{T_y W_{Gz}}{zI_{Gz}} \quad \text{Eq. 33}$$

où  $W_{Gz}$  est le moment statique de la poutre par rapport à l'axe  $Gz$ .

### **9.4. Contraintes maximales**

Les contraintes maximales appliquées à la poutre sont données pour les valeurs maximales  $y_{\max}$  de  $y$  et  $z_{\max}$  de  $z$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{(I_{Gz} / y_{\max})} \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = \frac{T_y W_{Gz}}{z_{\max} I_{Gz}} \quad \text{Eq. 34}$$

### **9.5. Conditions de résistance**

La contrainte maximale ne doit pas dépasser les limites élastiques pratiques à la compression-traction et au cisaillement, soit:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \leq R_{pe} &\Leftrightarrow \frac{M_f}{(I_{Gz} / y_{\max})} \leq \frac{R_e}{s} \\ \tau_{\max} \leq R_{pg} &\Leftrightarrow \frac{T_y W_{Gz}}{z_{\max} I_{Gz}} \leq \frac{R_{eg}}{s} \end{aligned} \quad \text{Eq. 35}$$

Avec toujours la prise en compte d'un facteur de concentration de contraintes si nécessaire.

### Remarque importante:

Comme nous l'avons vu, les fibres au dessus et en dessous de la fibre moyenne sont déformées en compression et traction respectivement. Alors la valeur de  $R_e$  doit être appropriée au régime de déformation subit. Ainsi, une poutre en acier se déformera de la même façon en dessous et au dessus de la fibre moyenne puisque  $R_e$  en compression et traction sont pratiquement les mêmes. En revanche, pour une poutre en béton, qui résiste beaucoup moins aux efforts de traction que de compression, il faudra choisir  $R_e = R_e(\text{traction})$ .

## 9.6. Déformations

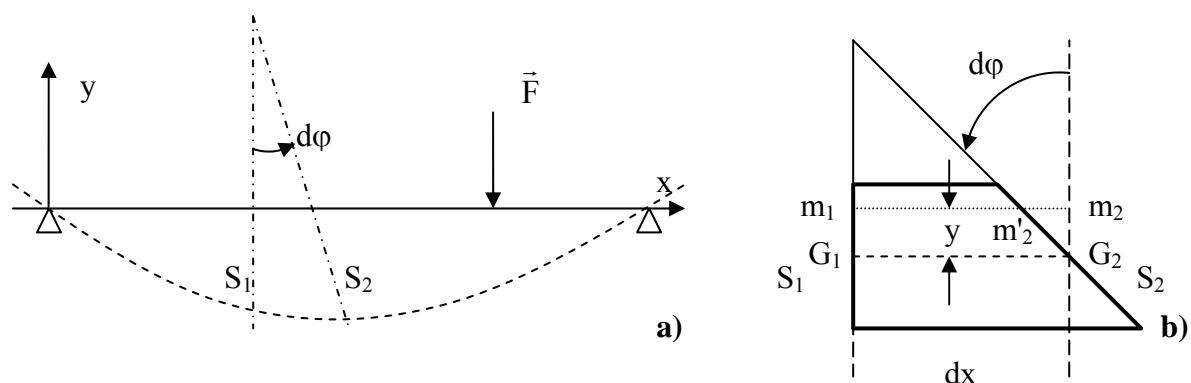
### 9.6.1. Déformations longitudinales

Les relevés des jauges d'extension en essai de flexion plane sur la section  $\Sigma$  montrent que:

- Les fibres situées en dessous du plan (xOz) s'allongent ( $\Delta\ell > 0$ ), alors que celles localisées au dessus se raccourcissent ( $\Delta\ell < 0$ ).
- Les fibres situées dans le plan (xOz) ne changent pas de longueur, ce sont des fibres neutres.
- Les allongements et les raccourcissements relatifs  $\Delta\ell/\ell$  sont proportionnels à la distance  $y$  de la fibre considérée au plan (xOz):  $\Delta\ell/\ell = \lambda y$ .

### 9.6.2. Recherche de la courbure

Considérons la poutre reposant sur deux appuis linéaires rectilignes parfaits et soumise à une charge concentrée verticale de la Figure 17. Les actions mécaniques extérieures provoquent la flexion de la poutre. La fibre moyenne se déforme et la courbe ainsi obtenue est appelée courbe déformée (pointillés de la Figure 25a).



**Figure 25:** a) Poutre déformée et b) zoom de la zone déformée montrant l'élongation le long de l'axe Oy.

Hypothèse:  $d\varphi$  petit (déformations faibles)

La loi de Hooke ( $\sigma = E \Delta\ell/\ell$ ) est donc respectée. On a (Figure 25b):

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\ell = m_2 m_2' \\ \ell = m_1 m_2 \\ \tan d\varphi \approx d\varphi = \frac{\Delta\ell}{y} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = yE \frac{d\varphi}{dx}$$

comme  $dx = G_1 G_2 = R d\varphi$  (avec R: rayon de courbure de la déformée), on a:

$$\sigma = yE \frac{1}{R}$$

or un résultat d'analyse nous donne que le rayon de courbure peut s'exprimer par:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad \text{ou encore puisque les déformations sont faibles (} y' \approx 0 \text{): } R \approx 1/y''$$

On obtient ainsi:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = Eyy'' \\ \text{avec } \sigma = y \frac{M_f}{I_{Gz}} \end{array} \right\} \Rightarrow M_f = EI_{Gz} y'' \quad \text{Eq. 36}$$

## 10. Flambage simple

### 10.1. Observations

C'est le cas de la compression simple, lorsque les efforts alignés avec la dimension la plus longue de la poutre, et que cette dernière est supérieure à huit fois la plus petite dimension transversale (Figure 26). On observe que si F devient importante, la poutre se met brusquement à s'incurver, à partir d'une valeur critique  $F_c$ . On arrive alors rapidement à la rupture, c'est le flambage. Ce phénomène est dû aux dissymétries, d'homogénéité du matériau, de géométrie de l'échantillon et d'application des efforts.

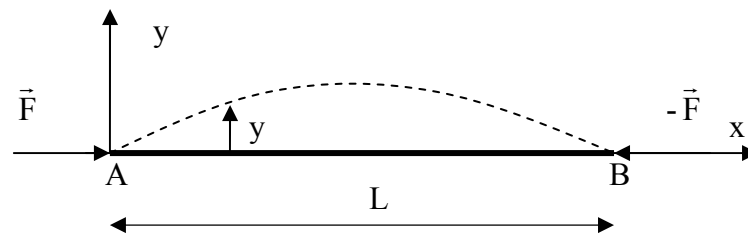


Figure 26: Poutre rectiligne en condition de flambage avec sa déformée

## 10.2. Formule d'Euler

On prendra l'hypothèse qu'aucun effort autre que  $F$  ne s'applique à la poutre (articulations parfaites aux extrémités, points d'applications de  $F$ , poids de la poutre négligeable). Alors, en prenant un moment quadratique minimum  $I_z$  (calculé pour la section transversale la plus petite), on obtient:

$$\left. \begin{array}{l} M_f = F_c y \\ = -EI_z y'' \end{array} \right\} \Rightarrow F_c y + EI_z y'' = 0$$

Ou encore

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{avec } \omega^2 = F_c / EI_z$$

$$\text{et } I_z = \iint R^2 dS$$

Cette équation différentielle admet comme solution générale:

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

et les conditions aux limites suivantes:

$$\text{en } x=0, y=0 \Rightarrow A=0$$

$$\text{en } x=L, y=0 \Rightarrow B \sin \omega L = 0$$

$$\text{comme } B \neq 0, \omega L = k\pi \text{ avec } k \text{ entier}$$

$$\text{soit } \omega = \pi/L \text{ avec } k=1$$

$$\text{on obtient donc: } y = B \sin(\pi x/L)$$

Ici  $B$  est indéterminée, à cause de l'instabilité elle-même indéterminée. La constante  $B$  correspond à la flèche de la section médiane. Comme:

$\frac{F_c}{EI_z} = \omega^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$ , on obtient finalement:

$$F_c = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \quad \text{Eq. 37 (Formule d'Euler)}$$

L'équation aux dimensions donne:  $[N] = [\frac{N}{m^2}][m^4][\frac{1}{m^2}]$ .

La formule d'Euler ne s'applique que pour des élancements  $\gamma$  tels que (déterminé empiriquement):

$$\gamma = L / \rho_{\min} > 110 \quad \text{Eq. 38}$$

Où  $\rho_{\min}$  est le rayon de giration minimum de section:

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{I_{z,\min}}{S}}$$

L'élancement caractérise la flexibilité d'une poutre et permet leur comparaison.

On peut envisager trois cas de déformation, selon la valeur de F par rapport à  $F_c$ :

- $F < F_c$ : cas de la compression simple, équilibre stable de la déformation. La poutre reste droite
- $F = F_c$ : c'est l'incertitude. La poutre peut soit rester droite, soit flamber jusqu'à la valeur B
- $F > F_c$ : La poutre flambe, on est en équilibre instable de déformation, pouvant conduire à rupture

### 10.3. Dépendance avec le type d'appui

En pratique, il faut prendre pour L une valeur  $KL$ , et le facteur K dépend du type d'appui pour les points d'application des forces. On prendra:

- $K=1$  pour une poutre sur 2 rotules en A et B
- $K=2$  pour une poutre en encastrement en A et libre en B
- $K=0.5$  pour une poutre encastree en A et B
- $K=0.7$  pour une poutre encastree en A et rotulée en B

### 10.4. Conditions de résistance

**10.4.1. Méthode d'Euler**

La force maximale admissible pour ne pas occasionner de flambage est par conséquent:

$$F_{c, \text{non-flambage}} < EI_z \frac{\pi^2}{L^2 s}$$

soit la contrainte associée

$$\sigma_{c, \text{non-flambage}} < EI_z \frac{\pi^2}{SL^2 s} = \frac{E\pi^2}{\gamma s}$$

Eq. 39

**10.4.2. Méthode Euler-Rankine**

C'est une méthode de calcul simplifiée valable si l'on n'atteint jamais la charge critique. La charge admissible  $F_{adm}$ , dépend du régime d'élanement dans lequel on se trouve. Le calcul de Euler-Rankine correspond au cas des poutres moyennes, dont l'élanement est typiquement entre 20 et 110 (Table 3).

Poutres courtes ( $\gamma < 20$ ) Compression simple	Poutres moyennes ( $20 < \gamma < 110$ ) Modèle de Euler-Rankine	Poutres longues ( $\gamma > 110$ ) Modèle d'Euler
$F_{adm} < R_{pc} s$	$F_{adm} < \frac{R_{pc} s}{\left(1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2\right)}$	$F_{adm} < \frac{R_{pc} s}{2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2}$

**Table 3:** Calcul des charges admissibles au flambage pour les différents modèles utilisés

Où,  $s$  est le coefficient de sécurité,  $R_{pc}$  la résistance pratique à la compression, et  $\gamma_c$  l'élanement critique défini comme:

$$\gamma_c < \sqrt{\frac{E\pi^2}{R_e}}$$

Eq. 40

**10.4.3. Méthode de Duteil**

Jusqu'à présent, nous n'avons pas pris en compte le fait que la création d'une flèche  $y$  par flambage engendre un moment de flexion. Ce moment de flexion occasionne à son tour des contraintes en compression qui ont été négligées. La méthode de Duteil propose de prendre en compte ces contraintes en compression, et utilise le protocole suivant:

Calcul de la contrainte

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_c + 1.3R_e)$$

Calcul de la contrainte d'affaiblissement admissible

$$\sigma_a = \left( \sigma_0 - \sqrt{\sigma_0^2 - \sigma_c R_e} \right)$$

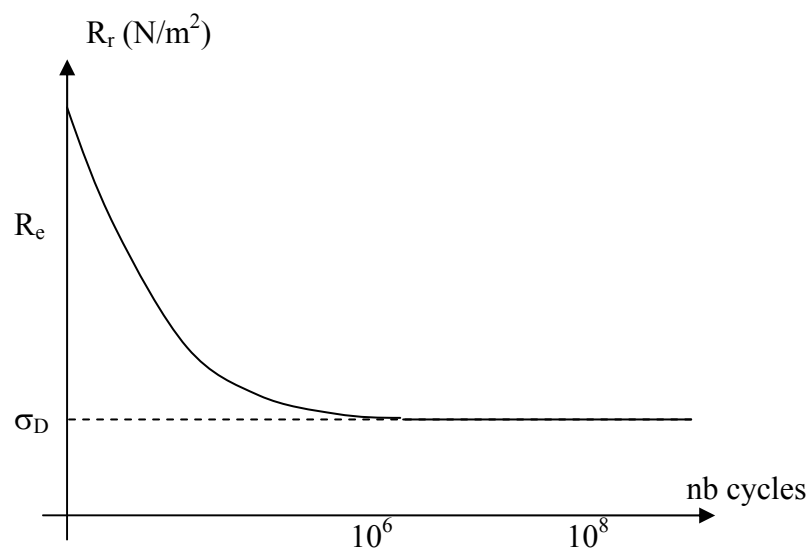
Vérification de:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} < \frac{\sigma_a}{s}$$

Eq. 41

## 11. La Fatigue

La plupart des pièces mécaniques subissent des sollicitations alternées et/ou variables. Ces pièces peuvent alors se détruire après un certain nombre de cycles de mise en charge, et ce même si la contrainte appliquée reste inférieure à  $R_e$ . La (Figure 27) est un exemple d'évolution de la limite à la rupture en fonction du nombre de cycles, ou essai de fatigue.



**Figure 27:** Essai de fatigue type sur une pièce mécanique en acier

On remarque qu'à partir d'un certain nombre de cycles, la résistance à la rupture atteint une valeur constante  $\sigma_D$ , appelée limite de fatigue ou d'endurance. Cette limite est généralement inférieure à  $R_e$ . Par exemple, pour un acier mi-dur type E36 ( $R_e = 360 N/mm^2$ ), on obtient typiquement  $\sigma_D = 270 N/mm^2$ .

Il n'existe pas de relation déterminée entre  $\sigma_D$  et d'autres caractéristiques du matériau. En revanche, on sait que certains types de préparation ou certaines imperfections vont influencer  $\sigma_D$ . Typiquement, un recuit de revenu ou un écrouissage participe à augmenter sa valeur, alors que la concentration de contraintes, les irrégularités de surface ou de volume, la corrosion, diminuent fortement  $\sigma_D$ .