

Notes de cours de gazodynamique

Par :Dr .A. BOUCHOUCHA

SOMMAIRE

CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GAZODYNAMIQUE

I-1 Introduction	1
I-1.1 Définitions	1
I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique	3
I-1.3 Relations des gaz parfaits	4
I-1.4 Relations isentropiques	4
I-2 Thermodynamique et physique du son	5
I-2.1 Propagation des ondes sonores	5
I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état	7
I-2.3 Nombre de Mach	8
I-2.4 Ondes de Mach	9

CHAPITRE II : ECOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL

II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel	11
II-2 Etat générateur	12
II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement	13
II-4 Seuil de compressibilité	14
II-5 Ecoulements isentropiques dans les canalisations	15
II-6 Conditions critiques	16

CHAPITRE III : ECOULEMENT ISENTROPIQUE AVEC CHANGEMENT DE SECTION

III-1 Ecoulement isentropique avec changement de section	17
III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable	19
III-3 Tuyère convergente	21
III-4 Tuyère convergente-divergente	23
III-5 Equation du rapport des sections	25

CHAPITRE IV : ONDES DE CHOC NORMALES

IV-1 Ondes de choc normales	26
IV-2 Equations de base	27
IV-3 Equation de Prandtl	30
IV-4 Changement d'entropie à travers un choc	30

CHAPITRE V : ONDES DE CHOC OBLIQUES

V-1 Les ondes de choc obliques	31
V-2 Equations de base	31
V-3 Equation de Prandtl	33
V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques	33
V-5 Les ondes de choc faibles	35
V-6 Ecoulement autour d'un coin	36
V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques	36

CHAPITRE VI : ECOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC FRICTION (THÉORIE DE FANNO)

VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO)	38
VI-2 Relations en nombre de Mach	39

TABLE I :

TABLE II :

TABLE III : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Fanno).....58

TABLE IV : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Rayleigh)62

APPENDICE I : Quelques facteurs de conversion.....66

 Ecoulement isentropique d'un gaz parfait.....51

 Ecoulement à onde de choc d'un gaz parfait54

APPENDICE II : Formules utiles.....67

CHAPITRE VI

VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO) :

Le chapitre (III) a montré l'effet de changement de section sur un écoulement compressible en négligeant le transfert de chaleur et (le frottement) la friction. Nous pourrions maintenant ajouter la friction et le transfert de chaleur au changement de section et considérer les effets couplés, qui sont faits dans des textes avancés. Au lieu de cela, comme une introduction élémentaire, cette section traite seulement l'effet de la friction, en négligeant le changement de section et le transfert de chaleur. Les suppositions de base sont

1. Ecoulement unidimensionnel, stationnaire et adiabatique
2. Gaz parfait avec des chaleurs spécifiques constantes
3. Conduite à section droite constante
4. Travail mécanique et changements d'énergie potentielle négligeables
5. Contrainte de cisaillement pariétale corrélée par un facteur de friction de Darcy

En effet, nous étudions un problème de friction des tuyauteries de type Moody, mais avec de grands changements de l'énergie cinétique, l'enthalpie et la pression dans le courant fluide.

Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section A et la longueur dx dans la figure (VI-1). La section est constante, mais d'autres propriétés de flux (p , ρ , T , h , V) peuvent varier avec x .

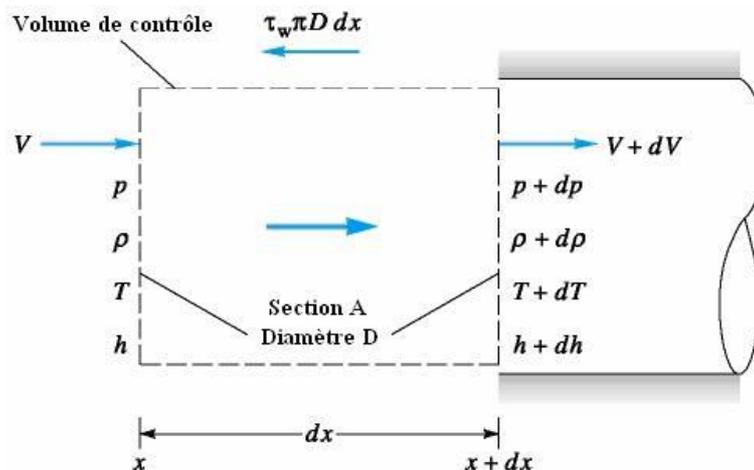


Fig. VI-1 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.

L'application des trois lois de conservation à ce volume de contrôle donne trois équations différentielles

$$\text{Continuité : } \rho V = \frac{\dot{m}}{A} = G = \text{const}$$

$$\text{ou } \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{VI-1a}$$

$$\text{Quantité de mouvement suivant } x : pA - (p + dp)A - \tau_w \pi D dx = \dot{m}(V + dV - V)$$

$$\text{ou } dp + \frac{4\tau_w dx}{D} + \rho V dV = 0 \quad \text{VI-1b}$$

$$\text{Énergie : } h + \frac{1}{2}V^2 = h_0 = c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}V^2$$

$$\text{ou } c_p dT + V dV = 0 \quad \text{VI-1c}$$

Puisque ces trois équations ont cinq inconnues, p, ρ, T, V et τ_w nous avons besoin de deux relations complémentaires. On est la loi des gaz parfaits

$$p = \rho RT \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{VI-2}$$

Pour éliminer τ_w comme une inconnue, il est supposé que la contrainte de cisaillement à la paroi est corrélée par un coefficient de friction local de Darcy f

$$\tau_w = \frac{1}{8}f \rho V^2 = \frac{1}{8}f \gamma p M^2 \quad \text{VI-3}$$

où la dernière forme obéit la relation de vitesse de son dans un gaz parfait $a^2 = \gamma p / \rho$. En pratique, f peut être relié au nombre de Reynolds local et la rugosité de la paroi par exemple par l'équation de Colebrook (appendice II), ou disons, le diagramme de Moody (voir références de la dynamique des fluides).

VI-2 Relations de nombre de Mach :

Les équations (VI-1) et (VI-2) sont des équations différentielles du premier ordre et peuvent être intégrées, en employant des données du coefficient de frottement, partant de n'importe quelle section d'entrée 1, où on connaît p_1, T_1, V_1 etc., pour déterminer $p(x), T(x)$, etc, le long de la conduite. Il est pratiquement impossible d'éliminer tous sauf une variable pour donner, disons, une équation différentielle simple pour $p(x)$, mais toutes les équations peut être écrite en termes du nombre de Mach $M(x)$ et le coefficient de frottement, en employant la définition du nombre de Mach

$$V^2 = M^2 \gamma RT$$

$$\text{ou } \frac{2dV}{V} = \frac{2dM}{M} + \frac{dT}{T} \quad \text{VI-4}$$

En éliminant des variables entre les équations (VI-1 à VI-4), nous obtenons les relations de travail

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} \tag{VI-5a}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} = -\frac{dV}{V} \tag{VI-5b}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{d\rho_0}{\rho_0} = -\frac{1}{2} \gamma M^2 f \frac{dx}{D} \tag{VI-5c}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma - 1)M^4}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} \tag{VI-5d}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \gamma M^2 \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2}{1 - M^2} f \frac{dx}{D} \tag{VI-5e}$$

Tous ceux sauf dp_0 / p_0 ont le facteur $1 - M^2$ dans le dénominateur, pour que, comme les formules de changement de section dans le chapitre (III), les écoulements subsonique et supersonique aient des effets opposés :

Propriété	Subsonique	Supersonique
p	Diminue	Augmente
ρ	Diminue	Augmente
V	Augmente	Diminue
p_0, ρ_0	Diminue	Diminue
T	Diminue	Augmente
M	Augmente	Diminue
Entropie	Augmente	Augmente

Nous avons ajouté à la liste au-dessus que l'entropie doit augmenter le long de la conduite pour l'écoulement soit subsonique ou bien supersonique comme une conséquence de la deuxième loi pour l'écoulement adiabatique. Pour la même raison, la pression et la densité de stagnation doivent toute les deux diminuer.

Le paramètre clef ci-dessus est le nombre de Mach. Si l'écoulement d'entrée est subsonique ou supersonique, le nombre de Mach de la conduite a toujours tendance en aval vers $M = 1$, parce que c'est le chemin le long duquel l'entropie augmente. Si la pression et la densité sont calculées des équations (VI-5a) et (VI-5b) et l'entropie de l'équation (IV-11), le résultat peut être tracé dans la figure (VI-2) en fonction du nombre de Mach pour $\gamma = 1.4$. L'entropie maximale aura lieu à $M = 1$, pour que la deuxième loi exige que les propriétés de l'écoulement dans la conduite s'approchent continuellement du point sonique. Puisque p_0 et

ρ_0 diminuent continuellement le long de la conduite en raison des pertes par friction (non-isentropiques), ils ne sont pas utiles comme des propriétés de référence. Toutefois, les propriétés

soniques $p^*, \rho^*, T^*, p_0^*, \text{et } \rho_0^*$ sont les quantités constantes de référence appropriées dans l'écoulement adiabatique dans les conduites. La théorie calcule alors les proportions $p/p^*, T/T^*$, etc., comme une fonction du nombre de Mach local et l'effet de friction intégré. Pour tirer des formules pratiques, nous attaquons d'abord l'équation (VI-5e), qui relie le nombre de Mach à la friction. Séparons les variables et intégrons :

$$\int_0^{L^*} f \frac{dx}{D} = \int_{M^2}^{1.0} \frac{1-M^2}{\gamma M^4 \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2 \right]} dM^2 \tag{VI-6}$$

La limite supérieure est le point sonique, s'il est en réalité ou pas atteint dans l'écoulement de la conduite. La limite inférieure est arbitrairement placée de la position $x = 0$, où le nombre de Mach est M . Le résultat de l'intégration est

$$\frac{\bar{f} L^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \tag{VI-7}$$

où \bar{f} est la valeur moyenne du coefficient de friction entre 0 et L^* (voir appendice II). En pratique, un f moyen est toujours supposé, et aucune tentative n'est faite pour représenter les légers changements du nombre de Reynolds le long de la conduite. Pour des conduites non circulaires, D est remplacé par le diamètre hydraulique $D_h = (4 \times \text{section}) / \text{périmètre}$.

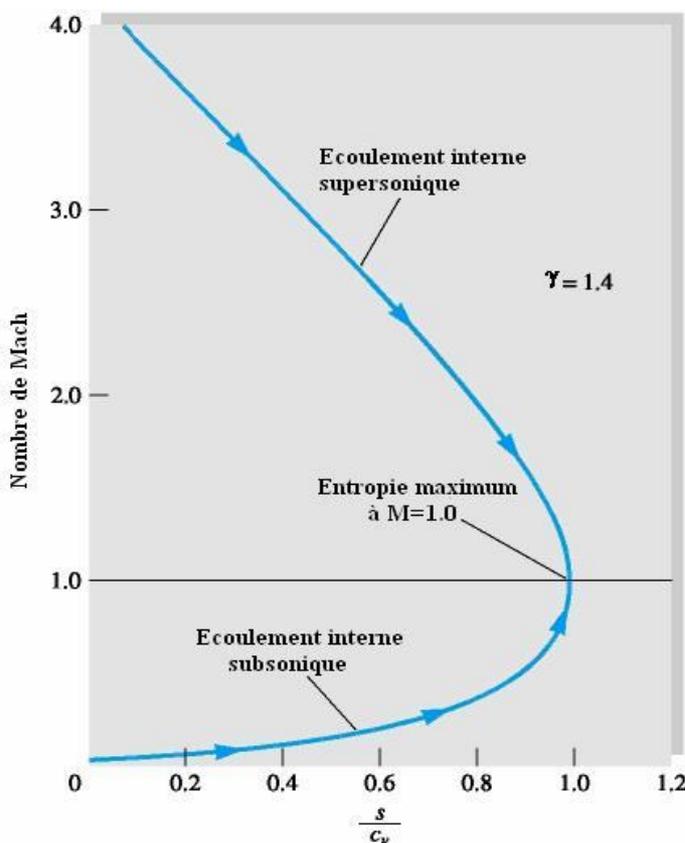


Fig. VI-2 : Ecoulement adiabatique avec friction dans un conduit de section constante s'approche toujours de $M=1$ pour satisfaire la seconde loi de la thermodynamique. La courbe calculée est indépendante de la valeur du coefficient de friction.

L'équation (VI-7) est tabulée en fonction du nombre de Mach dans la table (III). La longueur L^* est la longueur de conduite exigée pour développer un écoulement dans la conduite partant du nombre de Mach M jusqu'au point sonique. Beaucoup de problèmes impliquent les

conduites courtes qui ne deviennent jamais soniques, pour lequel la solution emploie les différences des longueurs "maximums", ou soniques tabulées. Par exemple, on donne la longueur ΔL exigée pour se développer de M_1 à M_2 par

$$\bar{f} \frac{\Delta L}{D} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_1 - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_2 \quad \text{VI-8}$$

Cela évite le besoin de tabulations séparées pour des conduites courtes.

Il est recommandé que le coefficient de friction \bar{f} soit estimé du diagramme de Moody pour le nombre de Reynolds moyen et le rapport de la rugosité pariétale du conduit.

Exemple VI.1:

Un courant d'air s'écoule subsoniquement dans une conduite adiabatique de 2 cm de diamètre. Le coefficient de friction moyen est 0.024. Quelle est la longueur de conduite nécessaire d'accélérer l'écoulement fluide de $M_1 = 0.1$ à $M_2 = 0.5$? Quelle longueur complémentaire l'accélérera à $M_3 = 1.0$? Supposez $\gamma = 1.4$.

Solution :

L'équation (VI-8) s'applique, avec les valeurs de fL^* / D calculées de l'équation (VI-7) ou lises de la table (III) :

$$\begin{aligned} \bar{f} \frac{\Delta L}{D} &= \frac{0.024 \Delta L}{0.02 m} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_{M=0.1} - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_{M=0.5} \\ &= 66.9216 - 1.0691 = 65.8525 \end{aligned}$$

Ainsi
$$\Delta L = \frac{65.8525(0.02 m)}{0.024} = 55 m$$

La longueur complémentaire $\Delta L'$ pour aller de $M = 0.5$ à $M = 1.0$ est prise directement de la table (II)

$$\begin{aligned} f \frac{\Delta L'}{D} &= \left(\frac{fL^*}{D} \right)_{M=0.5} = 1.0691 \\ \Delta L' &= L^*_{M=0.5} = \frac{1.0691(0.02 m)}{0.024} = 0.9 m \end{aligned}$$

Ces calculs sont typiques : Il prend 55 m pour accélérer jusqu'à $M = 0.5$ et ensuite seulement 0.9 m plus pour arriver entièrement jusqu'au point sonique.

Les formules pour d'autres propriétés de l'écoulement le long de la conduite peuvent être tirées des équations (VI-5). L'équation (VI-5e) peut être employée pour éliminer $f dx / D$ de chacune des autres relations, étant donnée, par exemple, dp / p comme une fonction seulement de

M et dM^2 / M^2 . Pour la convenance dans la tabulation des résultats, chaque expression est alors intégrée entièrement de (p, M) au point sonique $(p^*, 1.0)$. Les résultats intégrés sont

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2} \quad \text{VI-9a}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \quad \text{VI-9b}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{a^2}{a^{*2}} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad \text{VI-9c}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{(1/2)(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} \quad \text{VI-9d}$$

Toutes ces proportions sont aussi tabulées dans la table (III). Pour calculer les changements entre des points M_1 et M_2 qui ne sont pas soniques, les produits de ces proportions sont employés. Par

exemple, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p^*} \frac{p^*}{p_1}$ VI-10

puisque p^* est une valeur de référence constante pour l'écoulement.

Exemple VI.2:

Pour l'écoulement interne de l'exemple (VI.1) supposez que, à $M_1 = 0.1$, nous avons $p_1 = 600 \text{ kPa}$ et $T_1 = 450 \text{ K}$. A la section 2 plus éloignée en aval, $M_2 = 0.5$. Calculez (a) p_2 , (b) T_2 , (c) V_2 et (d) p_{02} .

Solution :

Comme information préliminaire nous pouvons calculer V_1 et p_{01} des données :

$$V_1 = M_1 a_1 = 0.1 [(1.4)(287)(450)]^{1/2} = 0.1(425 \text{ m/s}) = 42.5 \text{ m/s}$$

$$p_{01} = p_1 (1 + 0.2 M_1^2)^{3.5} = (600 \text{ kPa}) [1 + 0.2(0.1)^2]^{3.5} = 604 \text{ kPa}$$

Entrez maintenant à la table (III) ou les équations (VI-9) pour trouver les rapports suivants

Section	M	p/p^*	T/T^*	V/V^*	p_0/p_0^*
1	0.1	10.9435	1.1976	0.1094	5.8218
2	0.5	2.1381	1.1429	0.5345	1.3399

Employez ces proportions pour calculer toutes les propriétés en aval :

$$p_2 = p_1 \frac{p_2 / p^*}{p_1 / p^*} = (600 \text{ kPa}) \frac{2.1381}{10.9435} = 117 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2 / T^*}{T_1 / T^*} = (450 \text{ K}) \frac{1.1429}{1.1976} = 429 \text{ K}$$

$$V_2 = V_1 \frac{V_2 / V^*}{V_1 / V^*} = (42.5 \text{ m/s}) \frac{0.5345}{0.1094} = 208 \text{ m/s}$$

$$p_{02} = p_{01} \frac{p_{02} / p_0^*}{p_{01} / p_0^*} = (604 \text{ kPa}) \frac{1.3399}{5.8218} = 139 \text{ kPa}$$