

Notes de cours de gazodynamique

Par :Dr .A. BOUCHOUCHA

SOMMAIRE

CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GAZODYNAMIQUE

I-1 Introduction	1
I-1.1 Définitions	1
I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique	3
I-1.3 Relations des gaz parfaits	4
I-1.4 Relations isentropiques	4
I-2 Thermodynamique et physique du son	5
I-2.1 Propagation des ondes sonores	5
I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état	7
I-2.3 Nombre de Mach	8
I-2.4 Ondes de Mach	9

CHAPITRE II : ECOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL

II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel	11
II-2 Etat générateur	12
II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement	13
II-4 Seuil de compressibilité	14
II-5 Ecoulements isentropiques dans les canalisations	15
II-6 Conditions critiques	16

CHAPITRE III : ECOULEMENT ISENTROPIQUE AVEC CHANGEMENT DE SECTION

III-1 Ecoulement isentropique avec changement de section	17
III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable	19
III-3 Tuyère convergente	21
III-4 Tuyère convergente-divergente	23
III-5 Equation du rapport des sections	25

CHAPITRE IV : ONDES DE CHOC NORMALES

IV-1 Ondes de choc normales	26
IV-2 Equations de base	27
IV-3 Equation de Prandtl	30
IV-4 Changement d'entropie à travers un choc	30

CHAPITRE V : ONDES DE CHOC OBLIQUES

V-1 Les ondes de choc obliques	31
V-2 Equations de base	31
V-3 Equation de Prandtl	33
V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques	33
V-5 Les ondes de choc faibles	35
V-6 Ecoulement autour d'un coin	36
V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques	36

CHAPITRE VI : ECOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC FRICTION (THÉORIE DE FANNO)

VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO)	38
VI-2 Relations en nombre de Mach	39

TABLE I :

TABLE II :

TABLE III : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Fanno).....58

TABLE IV : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Rayleigh)62

APPENDICE I : Quelques facteurs de conversion.....66

 Ecoulement isentropique d'un gaz parfait.....51

 Ecoulement à onde de choc d'un gaz parfait54

APPENDICE II : Formules utiles.....67

CHAPITRE V

V-1 Les ondes de choc obliques :

Les ondes de choc peuvent se former à angle oblique σ par rapport au courant supersonique. Ce type d'ondes dévie le courant d'un angle δ (angle de déflexion), contrairement aux ondes de choc normales, pour lesquelles l'écoulement aval ne change plus sa direction.

Un choc oblique est causé essentiellement par la nécessité d'un écoulement de tourner selon un certain angle. Exemples des chocs obliques est l'écoulement à travers un coin d'extrémité d'un corps et à travers une rampe dans la paroi d'un tunnel supersonique.

La géométrie de l'écoulement considéré est illustrée dans la figure (V-1). Comme dans le chapitre précédent des ondes de choc normales l'état 1 dénote les conditions en amont et l'état 2 dénote celles en aval.

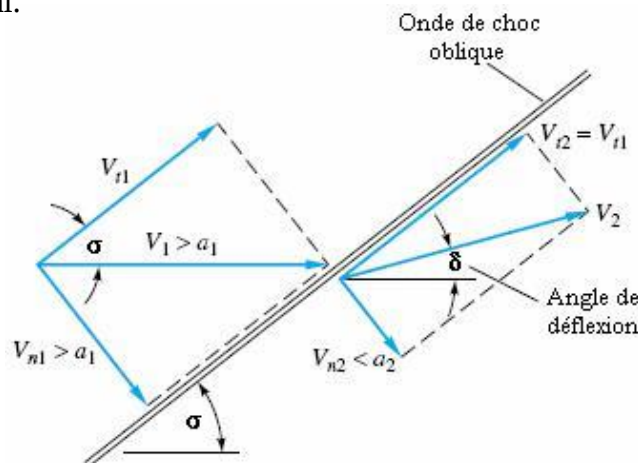


Fig. V-1 : Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.

L'angle de choc a une valeur arbitraire σ , et l'écoulement en aval V_2 change de direction d'un angle δ qui est fonction de σ et les conditions de l'état 1. L'écoulement amont est toujours supersonique, mais le nombre de Mach $M_2 = V_2 / a_2$ peut être subsonique, sonique ou supersonique tout dépend des conditions de l'écoulement.

V-2 Equations de base :

Il est avantageux d'analyser l'écoulement à choc oblique en lui décomposant en deux composantes normale et tangentielle par rapport à l'onde, (voir figure V-1). Pour un volume de contrôle très mince, on peut écrire les relations suivantes, sachant que $A_1 = A_2$ de part et d'autre de l'onde :

$$\text{L'équation de continuité est : } \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad \text{V-1a}$$

La projection normale de l'équation de quantité de mouvement est :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2 \quad \text{V-1b}$$

La projection tangentielle de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\rho_1 V_{n1} (V_{t2} - V_{t1}) = 0 \quad \text{V-1c}$$

L'équation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{n1}^2 + \frac{1}{2} V_{t1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{n2}^2 + \frac{1}{2} V_{t2}^2 = h_0 \quad \text{V-1d}$$

D'après l'équation (V-1c) on peut déduire qu'il y'en a pas de variation de la vitesse tangentielle à travers un choc oblique :

$$V_{t2} = V_{t1} = V_t = \text{Const} \quad \text{V-2}$$

Par suite la composante tangentielle de la vitesse a le seul effet d'ajouter une énergie cinétique constante $\frac{1}{2} \cdot V^2$ aux deux membres de l'équation de l'énergie (V-1d). Donc, les ondes de choc normales avec $_1 V$ et $_2 V$ remplacées par les composantes normales $_{n1} V$ et $_{n2} V$, ce qui entraîne l'apparition des nombres de Mach normaux au lieu de $_1 M$ et $_2 M$:

$$\left. \begin{aligned} M_{n1} &= \frac{V_{n1}}{a_1} = M_1 \sin \sigma \\ M_{n2} &= \frac{V_{n2}}{a_2} = M_2 \sin (\sigma - \delta) \end{aligned} \right\} \quad \text{V-3}$$

Pour un gaz parfait ($\gamma = \text{Const}$), et avec M_1 remplacé par M_{n1} :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)] \quad \text{V-4a}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \delta)} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \quad \text{V-4b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma] \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \sigma} \quad \text{V-4c}$$

$$T_{01} = T_{02} \quad \text{V-4d}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \text{V-4e}$$

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1)} \quad \text{V-4f}$$

Toutes ces dernières équations sont tabulées dans la table de l'onde de choc normale. Il est clair maintenant que la table est aussi valable pour les ondes de choc obliques.

$$\frac{\gamma R}{\gamma-1} T_1 + \frac{(V_{n1}^2 + V_{t1}^2)}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_2 + \frac{(V_{n2}^2 + V_{t2}^2)}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_0$$

Introduisons la vitesse du son critique $a^{*2} = \frac{2\gamma R T_0}{\gamma+1}$ pour un gaz parfait :

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 + \rho_1 \frac{(V_{n1}^2 + V_{t1}^2)}{2} = \frac{\rho_1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} \right]$$

Finalement, en utilisant l'équation de continuité (équ. V-1a) :

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_t^2 \quad \text{V-5}$$

C'est la relation de Prandtl pour un choc oblique.

Pour un choc normal ; avec $V_t = 0$, l'équation précédente prend la forme $V_1 V_2 = a^{*2}$ déjà rencontrée dans le chapitre précédent.

Une autre forme utile de l'équation (V-5) est :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a^{*2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_t^2 \quad \text{V-6}$$

Finalement, en utilisant l'équation de continuité (équ. V-1a) :

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_t^2 \quad \text{V-5}$$

C'est la relation de Prandtl pour un choc oblique.

Pour un choc normal ; avec $V_t = 0$, l'équation précédente prend la forme $V_1 V_2 = a^{*2}$ déjà rencontrée dans le chapitre précédent.

Une autre forme utile de l'équation (V-5) est :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a^{*2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_t^2 \quad \text{V-6}$$

V-3 Equation de Prandtl :

En considérons l'équation de l'énergie (V-1d), on a pour un gaz parfait :

$$\frac{\gamma R}{\gamma-1} T_1 + \frac{(V_{n1}^2 + V_{t1}^2)}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_2 + \frac{(V_{n2}^2 + V_{t2}^2)}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_0$$

Introduisons la vitesse du son critique $a^{*2} = \frac{2\gamma R T_0}{\gamma+1}$ pour un gaz parfait :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 + \rho_1 \frac{(V_{n1}^2 + V_{t1}^2)}{2} = \frac{\rho_1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p_2 + \rho_2 \frac{(V_{n2}^2 + V_{t2}^2)}{2} = \frac{\rho_2}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} \end{cases}$$

Soustrayons ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} (\rho_1 (V_{n1}^2 + V_{t1}^2) - \rho_2 (V_{n2}^2 + V_{t2}^2)) = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2}$$

Mais, les projections de l'équation de quantité de mouvement (V-1b et V-1c):

$$(\rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2) \left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right] = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{2} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} a^{*2} - V_t^2 \right]$$

Finalement, en utilisant l'équation de continuité (équ. V-1a) :

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_t^2 \quad \text{V-5}$$

C'est la relation de Prandtl pour un choc oblique.

Pour un choc normal ; avec $V_t = 0$, l'équation précédente prend la forme $V_1 V_2 = a^{*2}$ déjà rencontrée dans le chapitre précédent.

Une autre forme utile de l'équation (V-5) est :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a^{*2} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_t^2 \quad \text{V-6}$$

V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques :

Les tables (II) représentant les relations des chocs normaux peuvent être adaptées aux calculs des ondes de choc obliques. Une onde de choc oblique avec un nombre de Mach amont M_1 peut, par une transformation appropriée, être réduite à une onde de choc normale avec un nombre de

Mach amont de $M_1 \sin \sigma$. Par conséquent, si M_x de la table est égal à $M_1 \sin \sigma$, donc $\frac{p_y}{p_x}$, $\frac{T_y}{T_x}$,

$\frac{\rho_y}{\rho_x}$ et $\frac{p_{0y}}{p_{0x}}$ de la table sont respectivement les valeurs de $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ pour un choc

oblique de nombre de Mach amont M_1 et d'angle de choc σ , et le nombre de Mach en aval

$$M_2 = M_y / \sin(\sigma - \delta).$$

Une famille complète de solutions des ondes de choc obliques peut être tracée ou calculée d'après les équations (V-4). Pour un γ donné, l'angle de choc σ varie avec M_1 et δ de l'équation (V-4b). En utilisant une identité trigonométrique pour $\tan(\sigma - \delta)$, cela peut être réécrit de cette forme :

$$\tan \delta = \frac{2 \cot \sigma (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2} \quad \text{V-7}$$

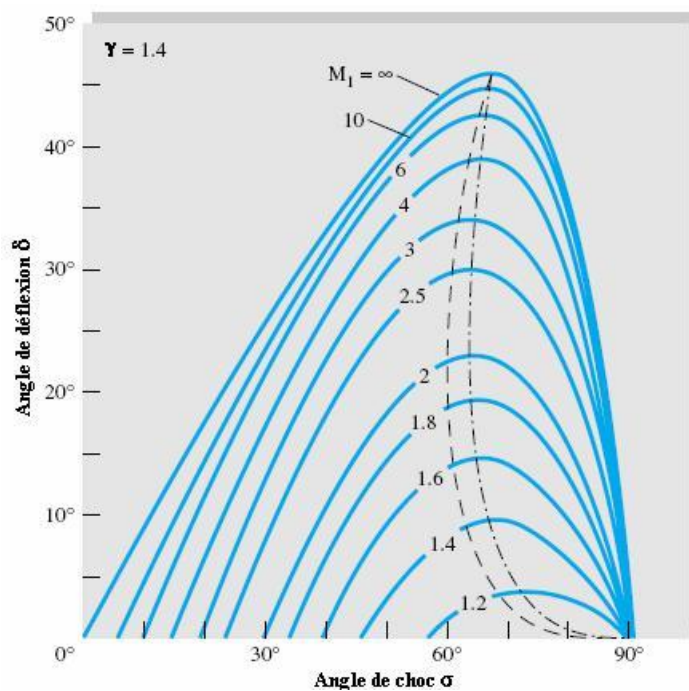


Fig. V-2 : Angles de déflexion du choc oblique en fonction de l'angle de choc pour divers nombre de Mach, $\gamma = 1.4$.

Toutes les solutions possibles de l'équation (V-7) pour $\gamma = 1.4$ sont tracées dans le graphique de la figure (V-2). Pour les déflexions où $\delta < \delta_{\max}$ il y a deux solutions : un choc faible (σ petit) et un choc fort (σ grand). Tous les points le long de la ligne tiret-pointillée sont le lieu géométrique de $\delta_{\max}$. La ligne en tirets est ajoutée au graphique pour montrer où M_2 est exactement sonique. On peut voir clairement que la région où l'écoulement en aval est subsonique est très étroite.

Pour les déflexions nulles ($\delta = 0$), la famille de chocs faibles satisfait la relation :

$$\sigma = \beta = \arcsin \frac{1}{M} \quad \text{V-8}$$

Ainsi les chocs faibles de déflexions nulles sont équivalents aux ondes de Mach.

V-5 Les ondes de choc faibles :

Pour toute δ finie, l'angle σ d'un choc faible est supérieur à l'angle de Mach β . Pour des petites δ l'équation (V-7) peut être développée en série de puissances (développement de Taylor) en $\tan \delta$ avec linéarisation de l'angle de choc :

$$\sin \sigma = \sin \beta + \frac{\gamma + 1}{4 \cos \beta} \tan \delta + \dots + O(\tan^2 \delta) + \dots \quad \text{V-9}$$

Si M_1 se situe entre 1.4 et 20.0 et les déflexions sont inférieures à 6° cette relation prédit les valeurs de σ d'un degré (1°) près pour un choc faible. Pour les déflexions plus supérieures, la relation précédente (équ. V-9) peut être utilisée comme estimation initiale d'une solution itérative de l'équation (V-7).

Une autre propriété qui change à travers le choc oblique et qui peut être développée en série de puissance pour de petits angles de déflexion, est la pression. Selon l'équation (V-4a) et avec linéarisation :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{(M_1^2 - 1)^{1/2}} \tan \delta + \dots + O(\tan^2 \delta) + \dots \quad \text{V-10}$$

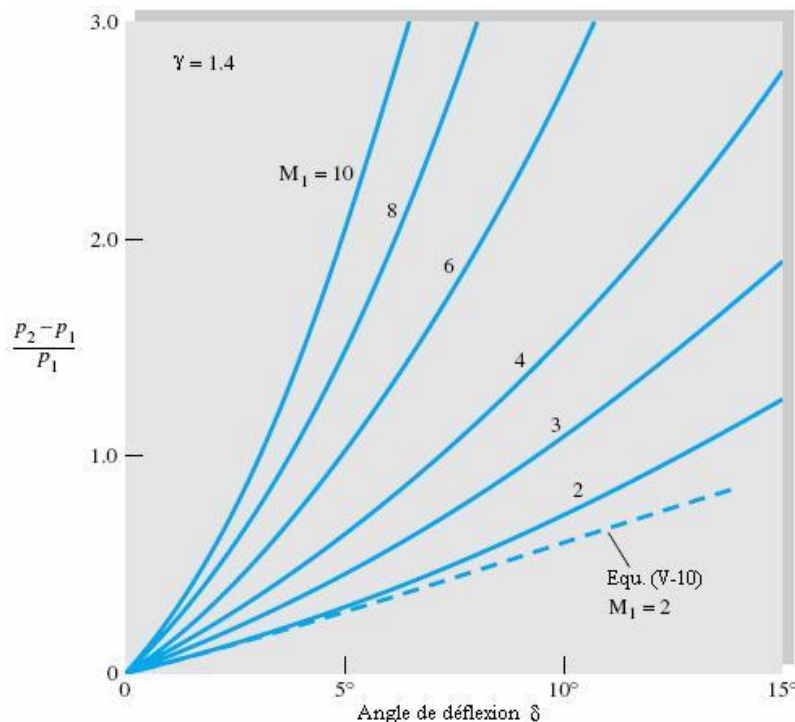


Fig. V-3 : Saut de pression à travers une onde de choc oblique faible avec des angles de déflexion très petits, $\gamma = 1.4$.

La figure (V-3) montre le saut de pression exact d'un choc faible calculé par (équ. V-4a). Aux petites déflexions les courbes sont linéaires avec des pentes données par l'équation (V-10).

Finalement, le changement d'entropie à travers le choc faible se développe en série de puissances, et on obtient :

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma(\gamma+1)M_1^2}{12(M_1^2 - 1)^{3/2}} \tan^3 \delta + \dots + O(\tan^4 \delta) + \dots \quad \text{V-11}$$

La variation de l'entropie est une puissance cubique de l'angle de déflexion δ . Ainsi les ondes de choc faibles sont presque isentropiques.

V-6 Ecoulement autour d'un coin :

Considérons l'écoulement autour d'un dièdre saillant d'angle au sommet 2ψ , dont l'arrête est perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

- Si ψ est petit, le phénomène se réduit à un problème d'onde de choc oblique (fig. V-4a).
- A partir d'une certaine valeur maximale de ψ ou d'une valeur minimale de M_1 qu'il est possible de calculer, l'onde se détache et le nombre de Mach aval M_2 devient inférieur à 1 (fig. V-4b). le point critique correspond au minimum de M_1 que présentent les courbes $\psi = \text{Const}$ de la figure (V-4b). d'après les courbes on remarque que M_2 devient subsonique un peu avant que l'onde se détache.
- Si l'obstacle est émoussé, le phénomène sera analogue mais l'onde se détache plutôt (fig. V-4c).

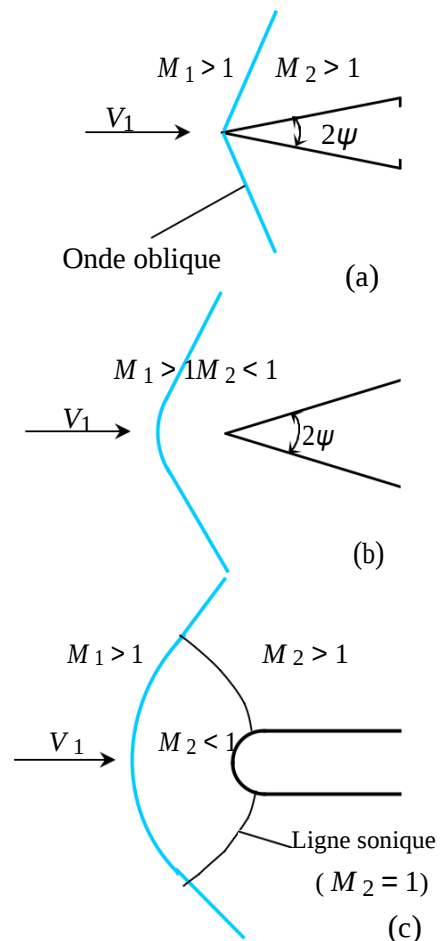


Fig. V-4 : Chocs au voisinage d'un coin.

V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques :

Quand un choc oblique rencontre une paroi il y a réflexion. Le choc réfléchi produit une déflexion en sens inverse, l'écoulement aval étant à nouveau parallèle à la paroi.

Chaque onde produit une diminution du nombre de mach et une augmentation de la pression. Les taux de compression des deux ondes sont différents ainsi que les rapports des nombres de Mach. La figure (V-5) représente schématiquement le phénomène ainsi que la variation de pression le long d'une ligne de courant et à la paroi.

Un phénomène analogue intervient quand il y a intersection d'ondes (fig. V-6) qui est accompagnée d'une réfraction. Cette réfraction est négligeable pour des ondes de faible intensité.

Quand il y a réflexion d'une onde de choc oblique sur la limite libre d'un jet il y a réflexion avec changement de signe.

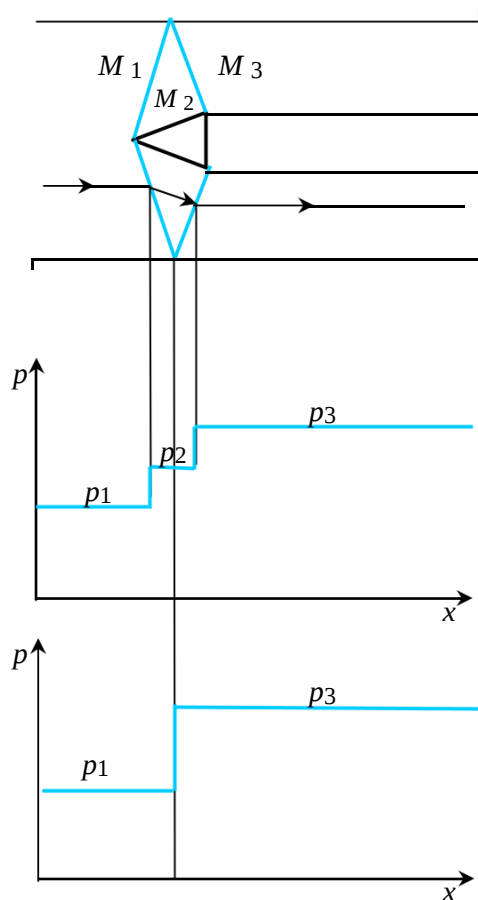


Fig. V-5 : Réflexion d'une onde de choc oblique.

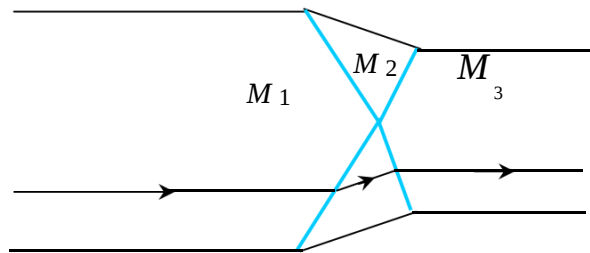


Fig. V-6 : Intersection des ondes de choc obliques.