

Notes de cours de gazodynamique

Par :Dr .A. BOUCHOUCHA

SOMMAIRE

CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GAZODYNAMIQUE

I-1 Introduction	1
I-1.1 Définitions	1
I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique	3
I-1.3 Relations des gaz parfaits	4
I-1.4 Relations isentropiques	4
I-2 Thermodynamique et physique du son	5
I-2.1 Propagation des ondes sonores	5
I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état	7
I-2.3 Nombre de Mach	8
I-2.4 Ondes de Mach	9

CHAPITRE II : ECOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL

II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel	11
II-2 Etat générateur	12
II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement	13
II-4 Seuil de compressibilité	14
II-5 Ecoulements isentropiques dans les canalisations	15
II-6 Conditions critiques	16

CHAPITRE III : ECOULEMENT ISENTROPIQUE AVEC CHANGEMENT DE SECTION

III-1 Ecoulement isentropique avec changement de section	17
III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable	19
III-3 Tuyère convergente	21
III-4 Tuyère convergente-divergente	23
III-5 Equation du rapport des sections	25

CHAPITRE IV : ONDES DE CHOC NORMALES

IV-1 Ondes de choc normales	26
IV-2 Equations de base	27
IV-3 Equation de Prandtl	30
IV-4 Changement d'entropie à travers un choc	30

CHAPITRE V : ONDES DE CHOC OBLIQUES

V-1 Les ondes de choc obliques	31
V-2 Equations de base	31
V-3 Equation de Prandtl	33
V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques	33
V-5 Les ondes de choc faibles	35
V-6 Ecoulement autour d'un coin	36
V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques	36

CHAPITRE VI : ECOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC FRICTION (THÉORIE DE FANNO)

VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO)	38
VI-2 Relations en nombre de Mach	39

TABLE I :

TABLE II :

TABLE III : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Fanno).....58

TABLE IV : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Rayleigh)62

APPENDICE I : Quelques facteurs de conversion.....66

 Ecoulement isentropique d'un gaz parfait.....51

 Ecoulement à onde de choc d'un gaz parfait54

APPENDICE II : Formules utiles.....67

CHAPITRE III

III-1 Ecoulement isentropique avec changement de section :

En combinant les relations isentropiques d'un écoulement compressible avec l'équation de continuité, on peut étudier des problèmes pratiques des écoulements compressibles. La figure III-1 illustre le cas d'un écoulement unidimensionnel. Un fluide réel (figure III-1a) a la propriété de non-glissement à la paroi, et le profile de vitesse $V(x, y)$ variable à travers la section de la conduite.

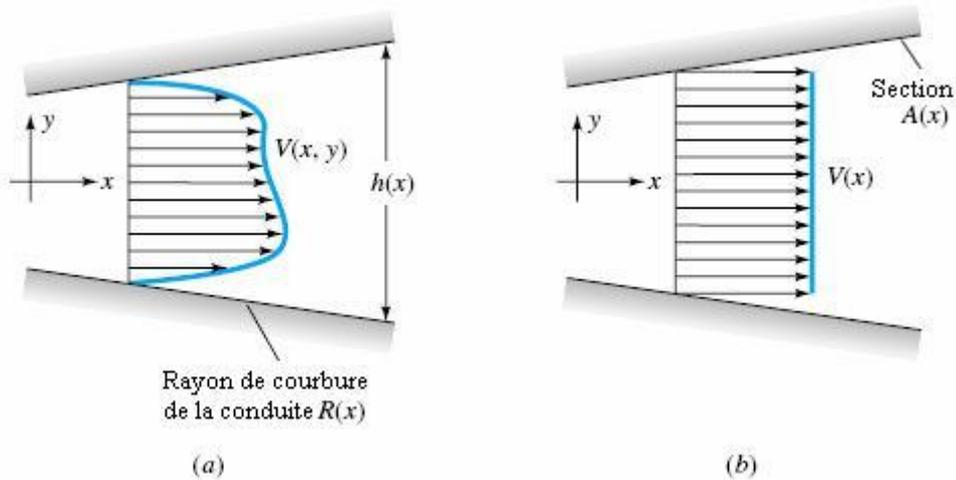


Fig. III-1 : Ecoulement compressible dans une canalisation : (a) Profile de vitesse d'un fluide réel ; (b) Approximation unidimensionnelle.

Cependant, si la variation de la section est petite et le rayon de courbure est grand :

$$\frac{dh}{dx} \ll 1 \qquad h(x) \ll R(x)$$

L'écoulement est approximativement unidimensionnel (figure III-1b) avec $V \approx V(x)$, ce qui simplifie la théorie.

$$m = \rho VA = \text{Const}$$

En différentiant logarithmiquement (voir appendice II), on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad \text{III-1}$$

L'équation d'Euler décrivant le mouvement stationnaire le long d'une ligne de courant est :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{1}{2} V^2 = 0 \qquad \text{où : } s \text{ est l'abscisse curviligne.}$$

Ou bien :
$$\frac{dp}{\rho} + VdV = 0 \quad \text{III-2}$$

La vitesse du son est $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ d'où :

$$dp = a^2 d\rho$$

En éliminant dp dans l'équation (III-2), on obtient :

$$\frac{a^2 d\rho}{\rho} + VdV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{VdV}{a^2}$$

Puisque $M^2 = V^2/a^2$:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad \text{III-3}$$

Si on substitue $\frac{d\rho}{\rho}$ dans l'équation (III-1), on aura :

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{(M^2 - 1)} \frac{dA}{A} \quad \text{III-4}$$

Qui est la première équation de la théorie d'Hugoniot donnant la relation entre le changement de la section d'une canalisation et la vitesse de l'écoulement compressible.

Aussi on a d'après l'équation (III-2) :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{M^2 a^2} \frac{d\rho}{\rho}$$

et puisque $a^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \quad \text{III-5}$$

Qui représente la deuxième équation d'Hugoniot.

L'inspection de ces deux équations (III-4 et III-5) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme $M^2 - 1$. Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.

1. Si $M = 1$; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation III-4), donc $dA = 0$, qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure III-2), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).

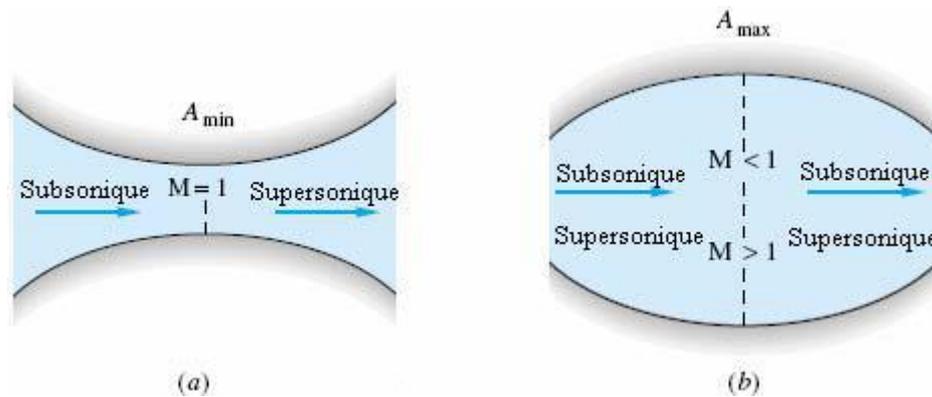


Fig. III -2 : Écoulement compressible dans une canalisation de section variable : (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique; (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique.

2. Si $M < 1$; écoulement subsonique, quand la section A augmente la vitesse V diminue et vice-versa.
3. Si $M > 1$; écoulement supersonique, toute augmentation de la section A implique une augmentation de la vitesse V et vice-versa.
4. Ainsi d'après l'équation (III-5), toute variation de la vitesse V entraîne une variation de la pression p dans le sens inverse. La table suivante récapitule les quatre cas déjà cités :

Propriétés	Écoulement			
	Subsonique		Supersonique	
Section	-	+	-	+
Vitesse / nombre de Mach	+	-	-	+
Densité / pression / température	-	+	+	-

III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable :

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique m en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation :

$$m = \rho VA$$

Substituons V par son expression d'après l'équation de Saint-Venant (II-5) :

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et puisque l'écoulement est isentropique : $\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p}{\rho^\gamma} = Const$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}$$

D'où :

$$\dot{m} = \rho_0 A \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

III-6

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A V_{\max} \Psi$$

Avec : $V_{\max} = V_L = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}}$

Posons $\frac{p}{p_0} = x$, donc :

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Quand p/p_0 a la valeur $\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, la fonction Ψ est maximum, puisque $\Psi = \Psi\left(\frac{p}{p_0}\right)$

s'annule si $p = 0$ et $p = p_0$ (figure III-3).

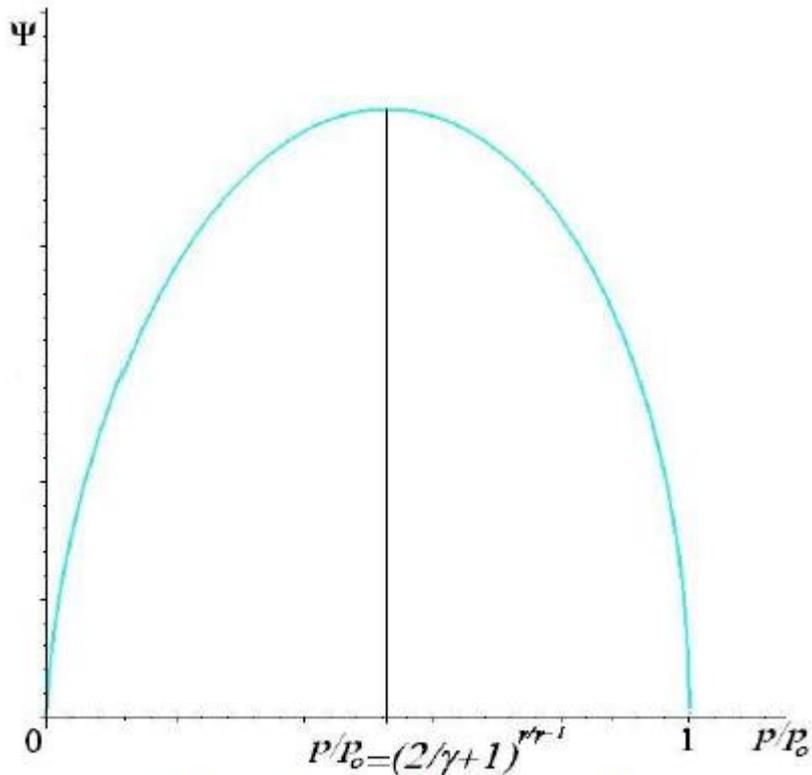


Fig. III-3 : Tracé de la fonction Ψ .

La pression correspondante est appelée pression critique et s'écrit :

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

elle s'obtiendra au col d'après la théorie d'Hugoniot, et le débit massique maximal sera :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\max} &= \rho_0 A V_{\max} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma+1}} \\ \Rightarrow \dot{m}_{\max} &= \rho_0 A \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \end{aligned} \quad \text{III-7a}$$

Aussi au col on a : $a^* = V^*$ où :

$$V^* = a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Et le débit massique critique sera:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\max} &= \rho^* A^* V^* \\ \Rightarrow \dot{m}_{\max} &= A^* \rho_0 a_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{aligned} \quad \text{III-7b}$$

Cette expression donne le débit massique maximum au col de la tuyère, où règne les conditions critiques. Pour $\gamma = 1.4$ on a :

$$\dot{m}_{\max} = 0.685 \cdot A^* \rho_0 a_0$$

III-3 Tuyère convergente :

Un gaz de pression p_0 , densité ρ_0 et de température T_0 s'écoule isentropiquement depuis un réservoir de grandes dimensions ($V_0 \approx 0$) à travers une tuyère convergente (figure III-4a) vers un compartiment de décharge où règne la pression en aval p_b inférieure à p_0 . Adoptons que la pression et la vitesse de sortie p_e et V , d'après la formule de Saint Venant :

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

et $m = \rho VA$ on étudie les différents états de l'écoulement dans la tuyère convergente en changeant la pression en aval p_b à diverses valeurs modérées.

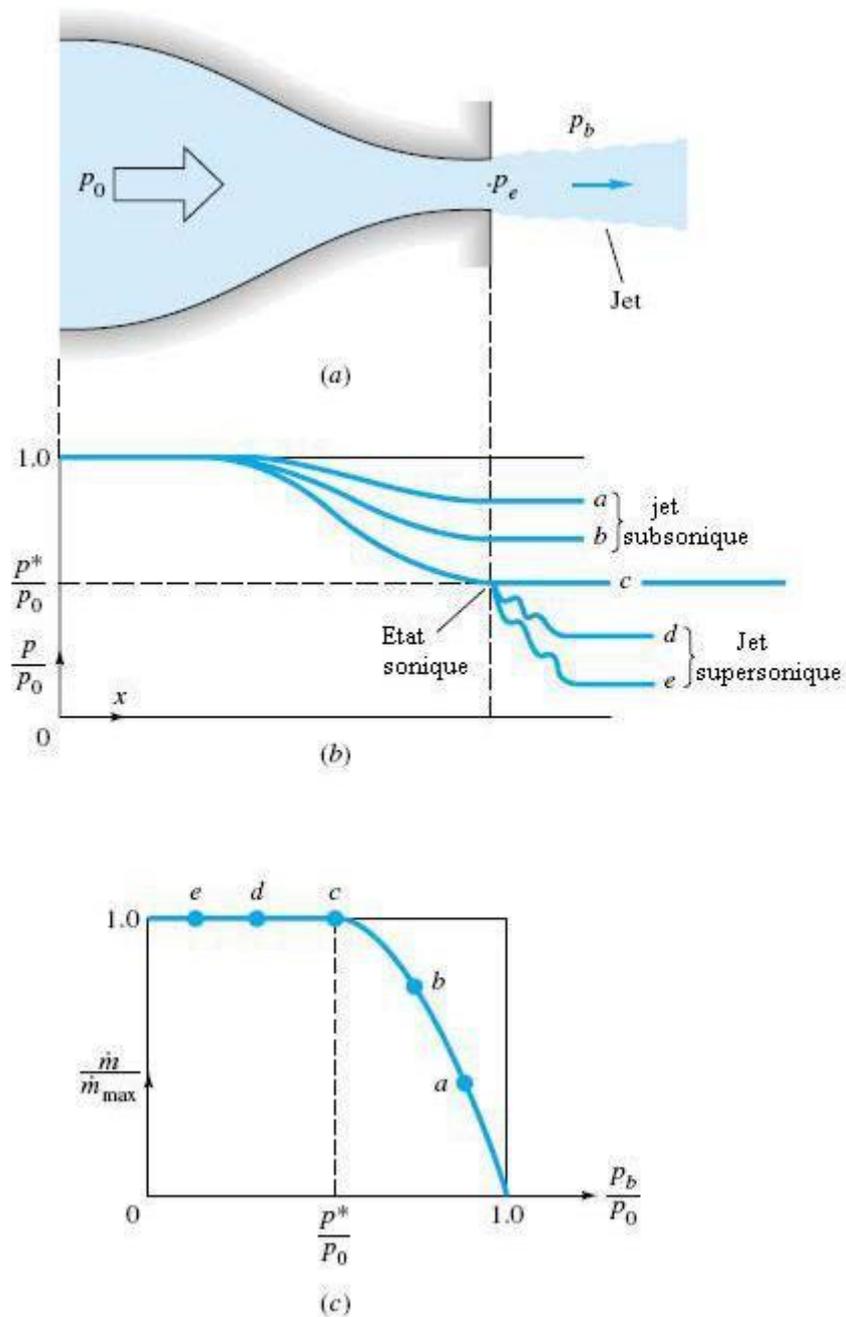


Fig. III-4 : Tuyère convergente : (a) Géométrie et pressions caractéristiques de la tuyère ; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval p_b ; (c) débit massique.

Si on considère des valeurs de p_b comme dans le cas a et b (figure III-4b), la pression au col est supérieure à la pression critique p^* . L'écoulement au sein de la tuyère convergente est subsonique et jet sort à la pression $p_e = p_b$. Le débit massique de l'écoulement isentropique subsonique est inférieur à la valeur critique m_{\max} (figure III-4c).

Si la pression p_b est égale à p^* (le cas c) au col. L'écoulement au col sera sonique, et le jet aussi ($p_e = p_b$), et le débit massique de l'écoulement sera maximal. L'écoulement en amont du col est subsonique.

Finalement, si p_b est diminuée au dessus de p^* , comme les cas d et e , la tuyère ne peut répondre plus puisqu'elle est suffoquée à sa valeur maximum du débit massique. Le col reste sonique avec $p_e = p^*$, et la distribution de la pression dans la tuyère est la même que celle dans le cas c . le jet s'étend de façon supersonique en réduisant sa pression de sa valeur critique p^* (au col) à la pression p_b . Mathématiquement parlant, le débit massique donné par l'équation (III-6) voit sa valeur se réduire dans les cas d et e ; mais ceci n'est pas vrai physiquement, en raison de la violation de la condition de l'écoulement isentropique autour d'elle s'appuie le théorie, l'écoulement sera non-isentropique à cause des ondes de choc qui apparaissent en rendant le phénomène irréversible.

III-4 Tuyère convergente-divergente :

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (III-5a). Si la pression en aval p_b est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister.

- œ Pour les cas A et B (figure III-5b), la pression p_b n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est $p_e = p_b$ et le jet est subsonique.

- œ Pour le cas C, le rapport des sections $\frac{A_e}{A_{col}}$ est exactement égal à $\frac{A_e}{A^*}$ pour un nombre de

Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure III-5c). l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et $p_e = p_b$.

- œ Cette fois considérons le cas H. ici p_b est tel que $\frac{p_b}{p_0}$ correspond exactement au rapport

$\frac{A_e}{A^*}$ d'un nombre de Mach supersonique à la sortie. L'écoulement dans le

divergent est entièrement supersonique, y compris le jet et $p_e = p_b$.

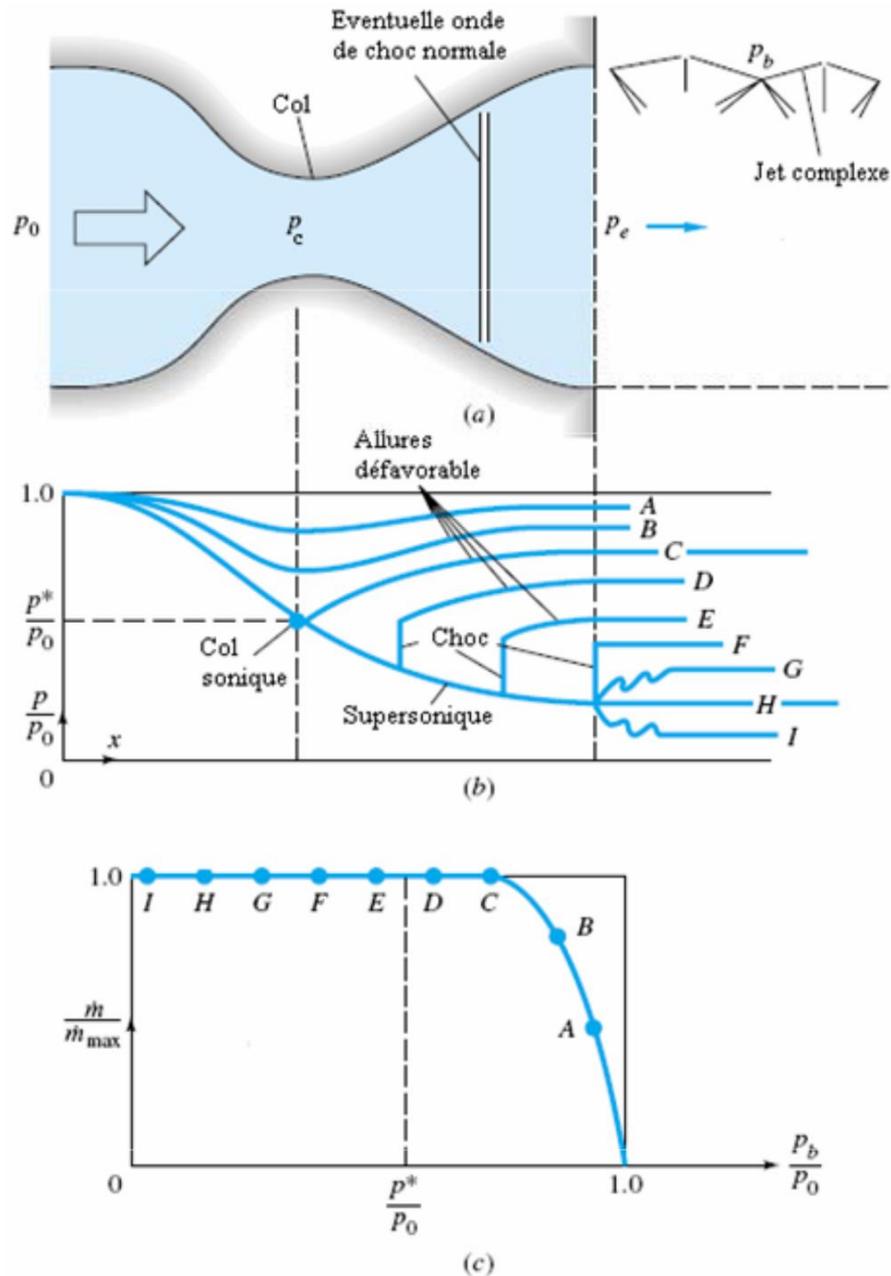


Fig. III-5 : Tuyère convergente-divergente : (a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval p_b ; (c) débit massique.

Supposons dans ce cas que p_b se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions p_b des cas D à F ont lieu (figure III-5b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure III-5c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression p_b .

Finalement dans le cas I, p_b est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

III-5 Equation du rapport des sections :

En utilisant les relations de l'écoulement isentropique du gaz parfait et l'équation de continuité on peut tirer une expression faisant intervenir seulement la section A et le nombre de Mach. Puisque le débit massique est conservé sous les conditions soniques :

$$\rho V A = \rho^* V^* A^*$$

Ou
$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V}$$
 III-8

Les termes à droite sont des fonctions du nombre de Mach pour l'écoulement isentropique on a d'après les relations isentropiques déjà rencontrées dans le chapitre précédent :

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Aussi des équations exprimant les diverses températures (T_0 , T et T^*) on aura :

$$\frac{V^*}{V} = \frac{(\gamma R T^*)^{\frac{1}{2}}}{V} = \frac{(\gamma R T)^{\frac{1}{2}}}{V} \left(\frac{T^*}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$
 III-9

Combinons les équations (III-8 et III-9) :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)} \right]$$
 III-10

Le graphe de cette expression pour un écoulement ($\gamma = 1.4$) monodimensionnel et isentropique sans ondes de choc dans la tuyère (figure III-6), montre que la section d'un écoulement isentropique dans une tuyère convergente-divergente est la section sonique ou critique (le col). Dans divers écoulements, un col sonique n'est plus présent est l'écoulement dans la tuyère est entièrement subsonique, ou moins fréquemment supersonique.

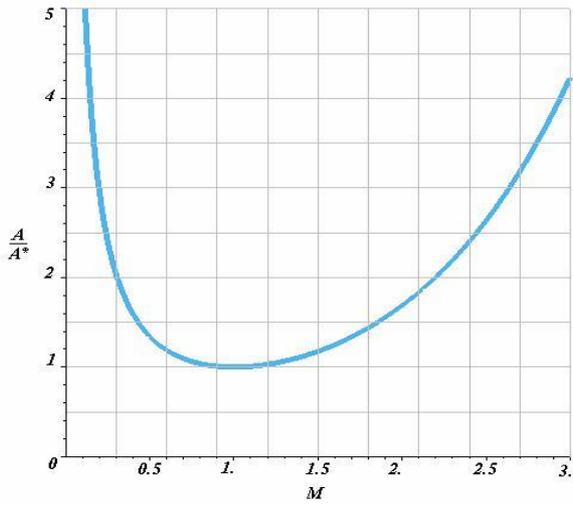


Fig. III-6 : L'équation (III-10) pour $\gamma = 1.4$