Notes de cours de gazodynamique

Par :Dr .A. BOUCHOUCHA

SOMMAIRE

CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GAZODYNAMIQUE

CHAPITRE II : ECOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL

CHAPITRE III : ECOULEMENT ISENTROPIQUE AVEC CHANGEMENT DE SECTION

CHAPITRE IV : ONDES DE CHOC NORMALES

CHAPITRE V : ONDES DE CHOC OBLIQUES

CHAPITRE VI : ECOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC FRICTION (THÉORIE DE FANNO)

CHAPITRE II

II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel :

En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un gaz s'écoulant à travers un volume de contrôle comme représenté sur la figure II-1, nous pouvons écrire l'équation de l'énergie entre les 2 sections comme suit :

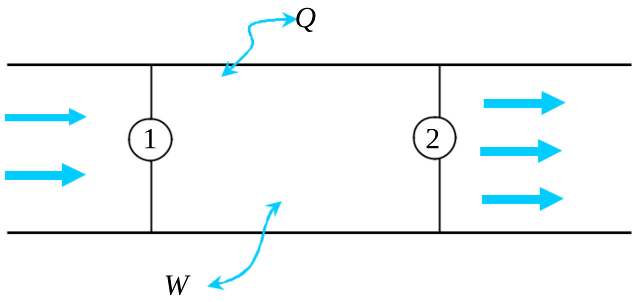

Fig. II-1 : Volume de contrôle.

$$C_1 + u_1 + p_1 v_1 + g z_1 + {}^1/_2\, V_1^2 + Q_1 + W_1 = C_2 + u_2 + p_2 v_2 + g z_2 + {}^1/_2\, V_2^2 + Q_2 + W_2$$

Où :

$\Delta C = C_2 - C_1$: la variation de l'énergie chimique.

Δu : la variation de l'énergie interne.

ΔQ : la quantité de chaleur échangée.

$\Delta W = W_2 - W_1$: le travail mécanique entre la sortie et l'entrée.

$g\Delta z$: la variation de l'énergie potentielle.

$p_2 v_2 - p_1 v_1$: la variation du travail spécifique (énergie de pression).

Si on suppose un écoulement sans échanges de chaleur avec l'extérieur, de travail mécanique ou de l'énergie chimique (c'est le cas des écoulements dans les conduites) : On obtient :

$$u_1 + p_1 v_1 + g z_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = u_2 + p_2 v_2 + g z_2 + \frac{1}{2}V_2^2$$

d'où :

$$u + \frac{p}{\rho} + g z + \frac{1}{2}V^2 = Cte \qquad \text{II-1}$$

Cette équation décrit l'énergie totale d'un écoulement de fluide interne (dans les conduites).

Si le fluide en écoulement est incompressible ($\rho = Cte$) avec une négligeable variation de la température qui entraîne une constance de l'énergie interne ; et l'équation (II-1) sera :

$$\frac{p}{\rho} + g\,z + \frac{1}{2}V^2 = Cte$$

Que l'on appelle l'équation de Bernoulli, ou sous une autre forme :

$$p_t = p + \rho\,g\,z + \frac{1}{2}\rho V^2 = Cte$$

où : p : la pression statique.

$\frac{1}{2}\rho\,V^2$: la pression dynamique.

$\rho\,g\,z$: la pression de potentiel (de la pesanteur).

$p_t = Cte$: la pression totale.

Pour un fluide compressible, sans transfert de chaleur, et en introduisant le concept de l'enthalpie on a :

$$h_t = h + g\,z + \frac{1}{2}V^2 = Cte$$

$$h_t = h + g\,z + \frac{1}{2}V^2 = Cte$$

avec : $h = u + \frac{p}{\rho}$: est l'enthalpie statique

et $h_t = Cte$: est l'enthalpie totale (ou de stagnation).

Donc : $h_t = h_1 + g\,z_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = h_2 + g\,z_2 + \frac{1}{2}V_2^2$

t celles ;

Mais comme, les variations de l'énergie potentielle sont extrêmement petites devant celles de l'enthalpie et l'énergie cinétique, on peut négliger les termes gz_1 et gz_2 dans nos analyses gazodynamiques, donc l'équation de l'énergie sera finalement :

:-2

$$h_t = h + \frac{1}{2}V^2 = Cste \qquad \text{II-2}$$

qui donne l'énergie totale d'un écoulement d'un gaz dans les conduites.

II-2 Etat générateur :

En supposant que le fluide compressible se décharge d'un réservoir de très grandes dimensions; les conditions dans cet état (générateur) seront appelées les conditions initiales, ce qui entraîne $V = V_0 \approx 0$ (avec l'indice 0 marquant les propriétés au réservoir), et si on considère un gaz parfait : $c_p \equiv \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_p$ et $c_p = Cste$

on aura :

$$c_p T_t \equiv c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}V^2$$

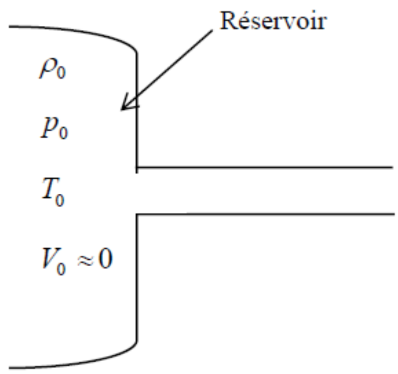

Fig. II-2 : Conditions initiales.

Sachant que :

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{c_p}{c_v} \\ c_p - c_v = R \end{cases} \Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Qui donne : $$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2$$

Et puisque la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par : $a^2 = \gamma RT = \gamma \dfrac{p}{\rho}$,on obtient :

$$\frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}V^2 \qquad \text{II-3}$$

où a_0 *et* a dénotent respectivement les vitesses du son aux conditions initiales (au réservoir) et statique.

En introduisant le nombre de Mach comme paramètre (*M=V/a*), l'équation (II-2) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

Et avec $a^2 = \gamma RT$ le rapport des températures totale et statique est :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

Où : T_0 : la température totale

T : la température statique.

M : le nombre de Mach.

II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement :

Si l'écoulement est isentropique ($\dfrac{p}{\rho^\gamma} = Cste$), les rapports des pressions et des densités pour un gaz parfait ($p = \rho RT$) sont calculées par :

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

et $$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

où p_0 *et* ρ_0 dénotent respectivement la pression et la densité isentropiques de stagnation.

II-4 Seuil de compressibilité :

Afin de déterminer la seuil de compressibilité (limite entre l'écoulement compressible incompressible), on note p_∞ la pression statique en un point quelconque dans le fluide où *M<1*, et d'après l'équation de Bernoulli :

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2$$

Et l'équation u rapport des pressions donne :

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Développons la dernière équation d'après la formule du binôme de Newton (ou en série de Taylor, voir appendice II); en posant : $\frac{\gamma}{\gamma - 1} = m$ et $\frac{\gamma - 1}{2} M^2 = Y$

$$(1+Y)^m = 1 + \frac{m}{1!} Y + \frac{m(m-1)}{2!} Y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots (Y < 1)$$

on aura :

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 + \ldots\ldots$$

$$p_0 - p_\infty = \frac{\gamma p M^2}{2}\left[1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4 + \ldots\ldots\right]$$

et on a : $\frac{\gamma p M^2}{2} = \frac{1}{2}\rho V^2$

donc : $$\frac{p_0 - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4 + \ldots\ldots$$

Dressons le tableau suivant en fonction du nombre de Mach avec $\gamma = 1.4$:

M	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**
$(p_0 - p_\infty)/\frac{1}{2}\rho V^2 = c$	1.000	1.003	1.010	1.023	1.041	1.064	1.093	1.129	1.170
Erreur relative (%) *E=(c-1)/c*	0	0.30	0.99	2.25	3.94	6.02	8.52	11.42	14.53

On peut remarquer évidemment que l'utilisation de l'équation de Bernoulli (utilisée pour les écoulements incompressibles), commet une erreur de 1% pour le nombre de Mach M=0.2, et cette erreur peut atteindre 2% à M=0.3 ; c'est ce que l'on appelle la seuil de compressibilité.

II-5 Ecoulements isentropiques dans les canalisations :

Considérons le cas de l'écoulement compressible d'un gaz parfait entre deux sections du canal (figure II-3).

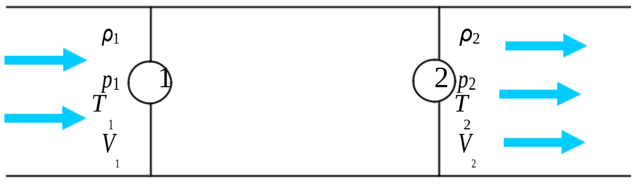

Fig. II-3 : Ecoulement dans une conduite.

L'équation (II-2) donne :

$$h_0 = h + \frac{1}{2}V^2 = Cste \qquad \Rightarrow \qquad h_0 = h_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}V_2^2 = Cste$$

d'où : $$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}V_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right]$$

et pour un écoulement isentropique: $p/\rho^{\gamma} = Cste$

$$\frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}} = \frac{p_2}{\rho_2^{\gamma}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p_2}{\rho_2} = \rho_2^{\gamma-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}}\right)$$

On obtient :

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \qquad \text{II-4}$$

Cette équation permet de calculer la vitesse V dans une section quelconque du canal, en connaissant seulement la pression statique.

L'équation de Barré de Saint-Venant est un cas spécial de l'équation (II-4) où les suppositions suivantes sont prises :

$$\begin{cases} V_1 = V_0 = 0 \\ p_1 = p_0 \\ p_2 = p \\ V_2 = V \end{cases}$$

on obtient : $$-\frac{V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \qquad \Rightarrow$$

$$V=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \qquad \text{II-5}$$

L'équation de Saint-Venant donne la vitesse du gaz dans une section à conditions de connaître les conditions initiales (au réservoir) et la pression statique à cette section, ou sous la forme suivante :

$$V=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}RT_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

Et l'équation S.V montre que l'annulation de la pression engendre une augmentation de la vitesse jusqu'à une valeur limite :

$$V_L=V_{\max}=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}RT_0}=\sqrt{2c_pT_0}$$

aussi : $V_L=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}a_0$

II-6 Conditions critiques :

Les propriétés de stagnation (a_0, T_0, p_0, ρ_0) sont utiles comme référence pour l'écoulement compressible, mais ils existent d'autres propriétés d'une utilité comparable à savoir les conditions où l'écoulement est sonique, $M=1.0$. Ces conditions soniques ou critiques seront notées par un astérisque : p^* , ρ^* , a^* , *et* T^* . il présentent certains rapports aux conditions de stagnation (totales) donnés par les équations suivantes avec $M=1$ et γ =1.4 :

$$\left.\begin{aligned}\frac{p^*}{p_0}&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=0.5283 &\qquad \frac{\rho^*}{\rho_0}&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=0.6339\\ \frac{T^*}{T_0}&=\frac{2}{\gamma+1}=0.8333 &\qquad \frac{a^*}{a_0}&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}=0.9129\end{aligned}\right\} \qquad \text{II-6}$$

II-6

Dans tous les écoulements isentropiques, les propriétés critiques sont constantes. La vitesse critique V^* est égale à la vitesse du son critique a^* par définition et souvent utilisée comme vitesse de référence pour l'écoulement isentropique :

$$V^*=a^*=\left(\gamma RT^*\right)^{1/2}=\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}RT_0\right)^{\frac{1}{2}}$$