Notes de cours de gazodynamique

Par :Dr .A. BOUCHOUCHA

SOMMAIRE

CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA GAZODYNAMIQUE

I-1 Introduction ………………………………………………………………………...1

I-1.1 Définitions ……………………………………………………………………...1

I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique ……………………………............3

I-1.3 Relations des gaz parfaits ……………………………………………………..…4

I-1.4 Relations isentropiques ………………………………………………...………4

I-2 Thermodynamique et physique du son ……………………………………………5

I-2.1 Propagation des ondes sonores ……………………………………….…………5

I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état ………………………….……………7

I-2.3 Nombre de Mach ……………………………………………………………..……8

I-2.4 Ondes de Mach ………………………………………………………...………..9

CHAPITRE II : ECOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL

II-1 Equations de base d'un écoulement compressible unidimensionnel ………………...11

II-2 Etat générateur ......…………………………………………………………...…..12

II-3 Propriétés isentropiques et de stagnation d'un écoulement ………………………….13

II-4 Seuil de compressibilité ……………………………………………………………14

II-5 Ecoulements isentropiques dans les canalisations ……………………….…………15

II-6 Conditions critiques ………………………………………………………………….16

CHAPITRE III : ECOULEMENT ISENTROPIQUE AVEC CHANGEMENT DE SECTION

III-1 Ecoulement isentropique avec changement de section ………………………………17

III-2 Débit massique d'une canalisation de section variable …………………..…………19

III-3 Tuyère convergente ……………………………………………………….…………21

III-4 Tuyère convergente-divergente …………………………………….……………23

III-5 Equation du rapport des sections ……………………………..……………25

CHAPITRE IV : ONDES DE CHOC NORMALES

IV-1 Ondes de choc normales …………………………….……………………………26

IV-2 Equations de base ……………………………………………………………………27

IV-3 Equation de Prandtl ………………………………………………………………30

IV-4 Changement d'entropie à travers un choc ……………………………………………30

CHAPITRE V : ONDES DE CHOC OBLIQUES

V-1 Les ondes de choc obliques ……………………………………….……………………31

V-2 Equations de base ………………………..…………………….……………………31

V-3 Equation de Prandtl …………………………………...…………………………33

V-4 Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques ..……………………………33

V-5 Les ondes de choc faibles ……………………………………..……………………….35

V-6 Ecoulement autour d'un coin ……………………………..………….……………….36

V-7 Réflexion et réfraction des ondes obliques ………………………………….…………36

CHAPITRE VI : ECOULEMENT COMPRESSIBLE AVEC FRICTION (THÉORIE DE FANNO)

VI-1 Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO) ……………………………………………………………..……………….38

VI-2 Relations en nombre de Mach ………………….……………………………….…..39

TABLE I :

TABLE II :

TABLE III : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Fanno)………………………………….…58

TABLE IV : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait (Courbes de Rayleigh) ……..…62

APPENDICE I : Quelques facteurs de conversion…………………………………………...66

Ecoulement isentropique d'un gaz parfait……………………………….………51

Ecoulement à onde de choc d'un gaz parfait ………………………….....……54

APPENDICE II : Formules utiles……………………………………………………………..67

CHAPITRE I

I-1 Introduction :

Ce cours traite quelques concepts de la discipline de l'aérodynamique des écoulements de fluide visqueux compressible. Quand un fluide se meuve à des vitesses comparables à sa vitesse de son, les variations en densités seront considérable et l'écoulement sera nommé compressible. Ce type d'écoulements est difficile de le réaliser pour les liquides, puisque la génération des vitesses soniques nécessite de hautes pressions de l'ordre de 1000 *atm*. Cependant dans les gaz, un doublement de pression peut causer un écoulement sonique, de ce fait que la science qui étudie l'écoulement compressible des gaz est souvent appelée Gazodynamique.

I-1.1 Définitions :

La gazodynamique : (Gasdynamics ديناميكا الغازات) est la branche de la dynamique qui s'occupe du mouvement de l'air et d'autres fluides gazeux, et des forces réagissant sur un corps en mouvement relatif aux pareils fluides.:

De tels écoulements compressibles se rencontrent dans les conduites transportant du gaz naturel, ou à travers le diffuseur d'un turboréacteur d'un avion, aux seins des turbines et des compresseurs. Probablement, les deux effets les plus importants de la compressibilité de l'écoulement sont :

1. La suffocation : où la vitesse de l'écoulement dans la conduite (interne) est étroitement limitée par la condition sonique.
2. Les ondes de choc : qui sont des petites discontinuités dans les propriétés de l'écoulements supersonique.

L'objectif de ce cours est d'expliquer tels phénomènes et les quantifier en utilisant les équations fondamentales suivantes :

- équation de continuité.
- équations de quantité de mouvement (Navier Stokes).
- équation de l'énergie.
- équation d'état des gaz.

Et en les résolvant simultanément pour quatre inconnues ; pression, densité (masse volumique), température et la vitesse d'écoulement (p, ρ, T ,V). Toutefois la théorie des écoulements compressibles est assez compliquée, notamment c'est la raison de supposer la réversibilité et l'adiabaticité de l'écoulement.

Alors, la gazodynamique étudie les cas où le parcours libre moyen (Ω) (Mean free path) des particules du gaz est négligeable devant la longueur caractéristique du domaine de l'écoulement (L), c.-à-d. si $\Omega / L \ll 1/100$ le gaz est considéré comme milieu continu. Ce rapport $\Omega / L \equiv Kn$ est appelé nombre de Knudsen.

Gaz : est un type de fluides qui déplacent sous l'action des contraintes de cisaillement $\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, et l'influence de la compressibilité est plus importante en comparaison avec l'état de repos.

Système : C'est l'ensemble mobile d'une matière, ayant des propriétés bien déterminées et des limites extérieures nommées les frontières du système. La caractéristique fondamentale d'un système au repos ou en écoulement est la quantité de matière (masse) contenue dans ce système.

Volume de contrôle **:** Un volume fictif et fixe dans l'intervalle du mouvement du système, utilisé essentiellement pour étudier l'écoulement passant à travers lui. Ces frontières se nomment surface de contrôle.

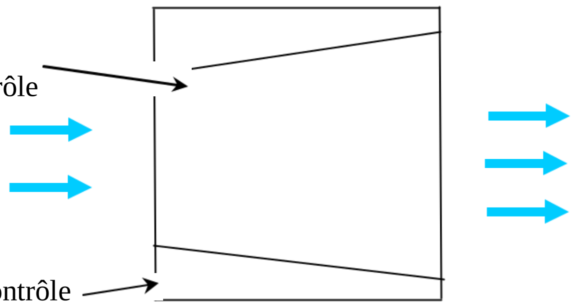
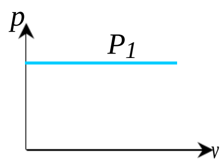


Fig. I-1 : Volume de contrôle.

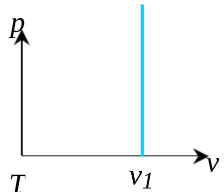
Processus (Evolution) : la transformation d'un état à un autre, avec généralement un échange de chaleur et de travail.

Exemples :

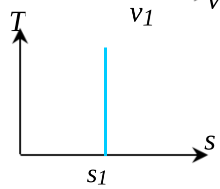
Evolution isobarique : à pression constante



Evolution isochore : à volume constant



Evolution isentropique : à entropie constante



Evolution isotherme : à température constante

Evolution adiabatique : sans échange de chaleur avec l'extérieur.

Cycle : processus qui retourne en son état initial.

Viscosité : est définie par le quotient de la contrainte de cisaillement τ au gradient de vitesse ($\frac{\partial u}{\partial y}$; aussi c'est la tension) : $\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{kg}{m.s}$, et mesure la résistance du fluide aux cisaillements.

Viscosité cinématique : est définie par $\nu \equiv \mu / \rho \quad \frac{m^2}{s}$, qui mesure le propagation du mouvement au sein du fluide en mouvement.

I-1.2 Quelques concepts de la thermodynamique :

Propriété : caractéristique thermodynamique de l'état d'un système :

- extensive : Propriété proportionnelle à la masse du système, exp. : *U, S, H.*
- intensive : Propriété indépendante de la masse du système, exp. : *u, s, h, T, P*.

Toutes propriété thermodynamique intensive peut être exprimée en fonction de deux propriétés thermodynamiques intensives au maximum.

Premier principe de la thermodynamique :

$dU = dQ + dW$: U l'énergie interne [J]

Seconde principe de la thermodynamique :

$dS \geq dQ / T$: S l'entropie du système [J/K]

Travail spécifique : d'un écoulement est défini par :

$$w_{1-2} = -\int_1^2 pdv \qquad [J/kg]$$

Quantité de chaleur réversible : par unité de masse :

$q_{1-2} = \int_1^2 T \; ds \quad [J/kg]$: s l'entropie spécifique [$J/kg.K$]

Enthalpie spécifique : est définie par :

$h \equiv u + pv \quad [J/kg]$: u énergie interne spécifique

: pv travail spécifique

Chaleur spécifique à volume constant : $c_v \equiv \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_v$

Chaleur spécifique à pression constante : $c_p \equiv \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_p$

Rapport des chaleurs spécifiques : $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

Loi de Laplace : pour un processus isentropique $pv^{\gamma} = Const$

I-1.3 Relations des gaz parfaits :

La majorité des calculs des écoulements compressibles est effectuée pour un gaz parfait (c.-à-d. idéal, chaleurs spécifiques constantes), ayant l'équation d'état :

$$PV = RT \qquad \text{I-1}$$

où R : est la constante du gaz : $R = R_0 / M_{gaz}$,

et R_0 est la constante universelle des gaz (R_0 = 8314 $J/kg.K$ = 8314 $m^2/s^2.K$)

M_{gaz} la masse molaire du gaz.

Si on utilise les quantités spécifiques où $\rho v = 1$ l'équation (I-1) devient :

$$p = \rho RT \qquad \text{I-2}$$

Ainsi pour l'air (supposé comme gaz parfait), on a M_{air} =28.96 donc : R =287 $J/kg.K$,

$R = c_p - c_v = Const$ et $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = Const$ d'où :

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 718\ J/kg.K \ ; \ c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 1005\ J/kg.K$$

Aussi pour un gaz parfait :

$$\Delta u = c_v \Delta T \qquad ; \qquad \Delta h = c_p \Delta T$$

I-1.4 Relations isentropiques :

En thermodynamique des écoulements compressibles, les relations qui décrivent les processus isentropiques (s=*Constante*) présentent de grande importance.

D'après le deuxième principe thermodynamique :

$$ds \geq dq/T$$

Si le processus est réversible : $ds = dq/T$

Si le processus est adiabatique : $dq = 0 \quad \Rightarrow \quad ds = 0$, d'où un processus isentropique est adiabatique et réversible.

La variation d'entropie sera d'après le premier et le second principe thermodynamique :

$$Tds = dh - dp/\rho$$

Mais comme $dh = c_p\, dT$ pour un gaz parfait; et $\rho T = \frac{p}{R}$ on aura :

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

en intégrant nous obtenons : $\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$ I-3

Ou: $\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$ I-4

Et pour un processus isentropique $s_2 = s_1$ on aura les relations en puissances des gaz parfaits :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} \quad \text{I-5}$$

I-2 Thermodynamique et physique du son :

I-2.1 Propagation des ondes sonores :

Il est bien connu que lorsqu'une minuscule perturbation se développe dans un gaz, la variation résultant de la pression se propage dans toutes les directions sous forme d'une onde de compression (onde longitudinale), c'est ce qui l'on entend comme du son. Sa vitesse de propagation est la vitesse du son.

Pour des raison de simplification, on suppose une onde plane dans un fluide stationnaire (au repos) dans un tube de section uniforme *A* (figure I-2).

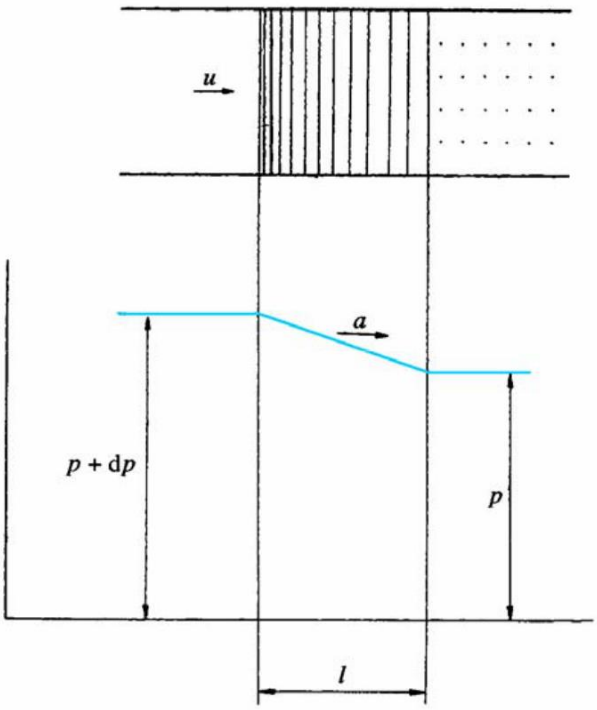


Fig. I-2 : Propagation de l'onde de compression.

Des augmentations de la vitesse, le pression et la densité (u, dp, $d\rho$) résultent de ladite perturbation.

Entre le front d'onde qui avance à la vitesse sonique a et l'autre plan où il était née cette perturbation, il y'en a une section de longueur l où la pression était augmentée.

Puisque la durée de l'augmentation de la pression dans l'onde est : $t=l/a$, la masse par unité du temps confinée dans cette section est augmentée par : $Al\, d\rho / t = A\, a\, d\rho$. Donc, le gaz de masse $Au\left(\rho + d\rho\right) = Au\,\rho$ s'écoule à travers cette section et l'équation de continuité sera :

$$A\, a\, d\rho = Au\,\rho$$

ou $$a\, d\rho = u\,\rho \qquad \text{I-6}$$

la vitesse du fluide dans cette section change de 0 à u dans un laps du temps t, de ce fait on peut la regarder comme ayant une accélération uniforme $\frac{u}{t} = \frac{u\,a}{l}$.

Puisque la masse est $Al\,\rho$ en négligeant $d\rho$ devant ρ ; l'équation du mouvement (2ème loi de Newton) sera :

$$Al\,\rho \cdot \frac{ua}{l} = A\, dp \quad \Rightarrow$$

$$\rho\, u\, a = dp \qquad \text{I-7}$$

En éliminant u des équations (I-6) et (I-7) nos obtenons :

$$a = \sqrt{dp / d\rho}$$

Mais puisque le soudain changement de la pression est considéré comme adiabatique (pas de gradients de température sauf à l'intérieur de l'onde) ; donc ce processus est isentropique, et l'expression de la vitesse sonore sera :

$$a = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s} \qquad \text{I-8}$$

Valide pour tout fluide, gaz ou liquide, et même pour un solide (voir tableau suivant).

	Substance	***a [ft/s]***	***a [m/s]***
Gaz	H_2	4246	1294
	He	3281	1000
	Air	1117	340
	Ar	1040	317
	CO_2	873	266
	CH_4	607	185
Liquides	Glycérine	6100	1860
	Eau	4890	1490
	Mercure	4760	1450
	Ethyle	3940	1200
Solides	Aluminium	16900	5150
	Acier	16600	5060
	Glace	10500	3200

Tab. I-1 : la célérité sonore pour divers matériaux à 60°F (15.5°C) et 1 *atm*.

Il est remarquable que la forme de la dernière équation de la célérité sonore (I-8) ne soit pas pratique dans tous les cas.

I-2.2 La vitesse sonore d'après l'équation d'état:

Pour une quelconque substance, on a : $a = \sqrt{\left.\dfrac{dp}{d\rho}\right|_s}$

le premier principe de la thermodynamique donne : $dq = du + p\,dv$

Et pour un processus réversible $dq = T\,ds$ d'où $T\,ds = du + p\,dv$

On a aussi, d'après les relations de Maxwell : $du = c_v\,dT + \left(T\left.\dfrac{\partial p}{\partial T}\right|_v - p\right)dv$

On aura :
$$T\,ds = \left[c_v\,dT + \left(T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v - p\right)dv\right] + p\,dv$$

$$\Rightarrow \qquad T\,ds = c_v\,dT + \left(T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v\right)dv$$

mais puisque $v = \dfrac{1}{\rho}$ et $dv = -\dfrac{d\rho}{\rho^2}$, on a : $T\,ds = c_v\,dT - \left(\dfrac{T}{\rho^2}\left.\dfrac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho\right)d\rho$

et quand $p \equiv p(T,\rho)$:

$$dp = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho dT + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T d\rho \qquad \Rightarrow \qquad dT = \frac{dp - \left.\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T d\rho}{\left.\dfrac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho}$$

en substituant pour dT :

$$T\,ds = c_v\left[\frac{dp - \left.\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T d\rho}{\left.\dfrac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho}\right] - \left(\frac{T}{\rho^2}\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho\right)d\rho$$

Groupons les termes en dp *et* $d\rho$ on obtient :

$$T\,ds = \left(\frac{c_v}{\left.\dfrac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho}\right)dp - \left(c_v\frac{\left.\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T}{\left.\dfrac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho} + \frac{T}{\rho^2}\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho\right)d\rho$$

Si le processus est isentropique ($ds = 0$)

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = \frac{1}{c_v}\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho \left(c_v \frac{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T}{\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho} + \frac{T}{\rho^2}\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho \right)$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T + \frac{T}{c_v \rho^2}\left(\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho\right)^2$$

Finalement :

$$a(T,\rho) = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T + \frac{T}{c_v \rho^2}\left(\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho\right)^2} \qquad \text{I-9}$$

Exemple :

Pour un gaz parfait : $p(T,\rho) = \rho RT$

Par dérivation on a : $\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = RT \quad ; \quad \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho = \rho R$

D'où : $$a(T,\rho) = \sqrt{RT + \frac{T}{c_v \rho^2}(\rho R)^2}$$

$$= \sqrt{RT\left(1 + \frac{R}{c_v}\right)}$$

$$= \sqrt{RT\left(1 + \frac{c_p - c_v}{c_v}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{\gamma RT}$$

Pour un gaz parfait, La vitesse de son dépend uniquement de la température.

I-2.3 Nombre de Mach :

Le rapport de la vitesse V à la vitesse du son a, c.-à-d. $M = V/a$, est appelé nombre de Mach. Donc, si on considère un corps placé à la direction d'un écoulement uniforme de vitesse V, au point de stagnation (d'arrêt) , la pression augmente de $\Delta p = \rho V^2 / 2$ ce qui implique une augmentation de la densité de $\Delta \rho = \Delta p / a^2$; par conséquent :

$$M = \frac{V}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta \rho}{\rho}} \qquad \text{I-10}$$

En d'autres termes, le nombre de Mach est un nombre adimensionnel qui exprime l'effet de compressibilité d'un fluide en écoulement. D'après l'équation (I-10), le nombre de Mach M correspondant à une variation de 5% est environ 0.3, pour cette raison un écoulement stationnaire peut être supposé incompressible jusqu'à un Mach de 0.3.

Le nombre de Mach est le paramètre dominant dans l'étude de l'écoulement compressible. L'aérodynamique notamment utilise une classification des écoulements en fonction des diverses valeurs du nombre de Mach :

$M < 0.3$: écoulement incompressible, où les effets de la densité sont négligeables.

$0.3 < M < 0.8$: écoulement subsonique, où les effets de la densité sont importants mais sans apparition des ondes de choc.

$0.8 < M < 1.2$: écoulement transsonique, où les ondes de choc apparaissent, en divisant l'écoulement en régions subsonique et supersonique.

$1.2 < M < 5.0$: écoulement supersonique, où les ondes de choc existent sans aucune région subsonique.

$5.0 < M$: écoulement hypersonique, où les ondes de choc et d'autres variations des propriétés de l'écoulement sont spécialement fortes.

Ces cinq catégories sont essentiellement utilisées dans les écoulements compressibles externes. Alors, pour les écoulements internes, la question sera simplement si que l'écoulement est subsonique ($M < 1$) ou supersonique ($M > 1$).

I-2.4 Ondes de Mach :

Si on considère la propagation d'une onde sonore, une minuscule variation (comme un son) se propage à une vitesse sonique *a* depuis la source sonore dans toute les directions (figure I-3a).

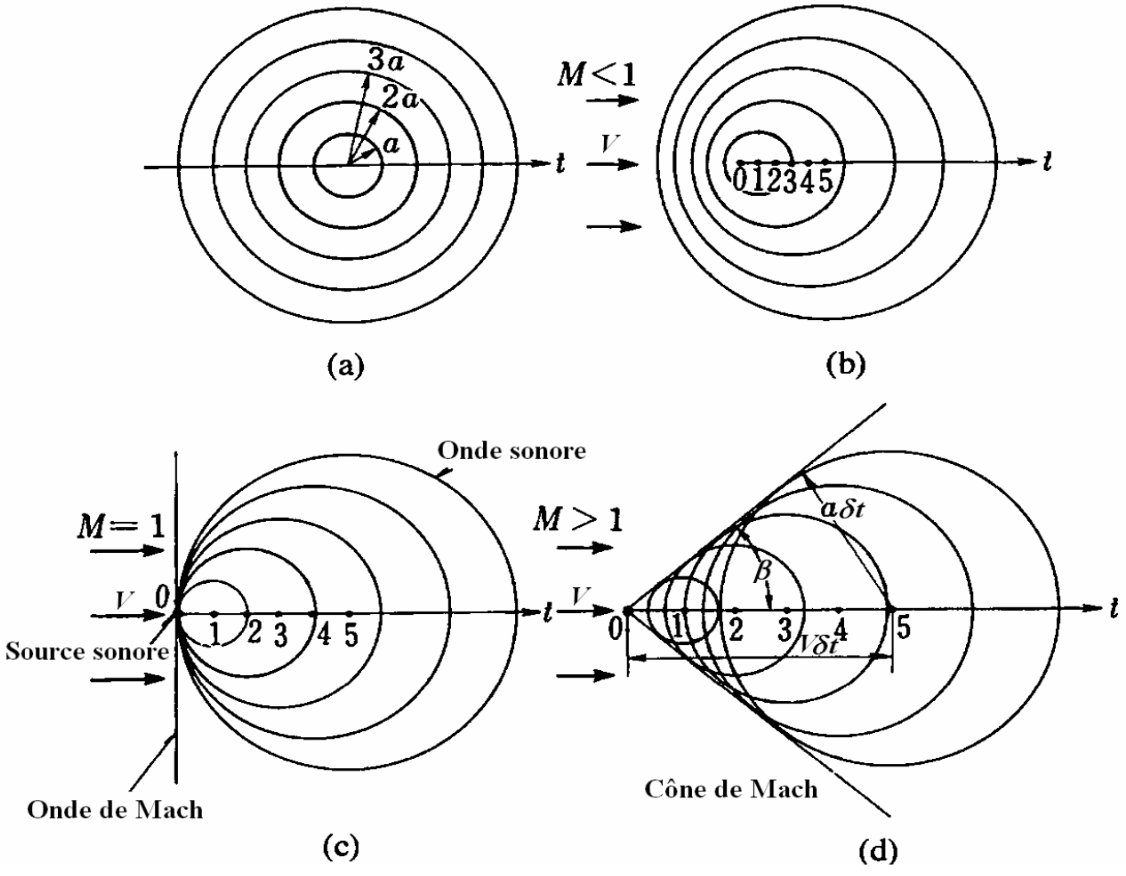


Fig. I-3 : Nombre de Mach et les propagations des ondes sonores : (a) repos ; (b) subsonique (M<1) ; (c) sonique (M=1) ; (d) supersonique (M>1).

Une succession d'ondes sonores est produite continûment d'une source sonore placée dans la direction d'un écoulement de vitesse *V*. Quand *V* est inférieure à *a* (figure I-3b) ; c.-à-d. $M<1$, les fronts d'onde se propagent à la vitesse $a-V$ en amont, mais à $a+V$ en avale de l'écoulement. Par conséquent, l'intervalle entre les fronts d'ondes est plus dense en amont qu'en aval.

Quand $V = a$, c.-à-d. $M=1$, la vitesse de propagation ($V-a$) sera nulle, et le son se propage seulement en avale de l'écoulement (figure I-3c), en produisant une onde appelée onde de Mach normale à la direction de l'écoulement. Si un observateur est situé en amont de l'écoulement, il ne peut pas entendre le mouvement s'approchant.

Si $V > a$, c.-à-d. $M>1$, les fronts d'ondes cessent de se propager en amont (figure I-3d), mais ils continuent de se propager en aval. L'enveloppe de ces ondes forme le cône de Mach, et le son est confiné dans le cône. Si l'angle au sommet du cône de mach est 2β , on a :

$$\sin\beta = \frac{a\delta t}{V\delta t} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \qquad \text{I-11}$$

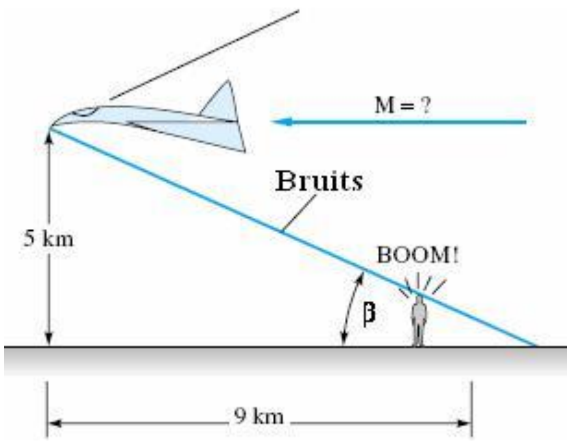
Cet angle est appelé angle de mach.

Plus que le nombre de Mach V/a est élevé, plus le cône est pointu, par exemple ; $\beta=30°$ à $M=2.0$ et 11.5° à $M=5.0$. Pour le cas limite de l'écoulement sonique, $M = 1$; $\beta=90°$, le cône de mach deviendra un plan déplaçant avec la particule ; ce qui est en agrément avec la figure (I-3c). L'observateur ne peut entendre les perturbations supersoniques seulement s'il se trouve dans le cône de Mach (zone d'action), et la zone en dehors du cône est appelée zone de silence.

Exemple :

Un observateur ne peut entendre le bruit causé par un avion volant à 5 *km* d'altitude, jusqu'il s'éloigne de lui de 9 *km*. Quel est le nombre de Mach de l'avion ? en supposant des petites perturbations et négligeant les variations de la vitesse du son avec l'altitude.

Solution :



$$tg\,\beta = \frac{5km}{9\,km} = 0.5556 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 29.05°$$

et de l'équation (I-11) : $M = \frac{1}{\sin\beta} = 2.06$.