Centre Universitaire de Mila
Département de ST

2019/2020
Licence S4

Mathématique 4
TD 04

Exercice 1. Trouver le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \; z^{2n}$$

puis étudier la convergence de cette série pour $\|z\| = \mathrm{R}$, et calculer sa somme.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+3)! \; z^n$ ② $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n \; z^n$

③ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n \; z^n$ ④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ ⑤ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)^n \; z^n$

Exercice 3. Soit la série entière $\sum_n a_n \; z^n$. On suppose que cette série est divergente pour $z = 3 + i4$ et convergente pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 4. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)}.$$

Développer la fonction f en série de Taylor au voisinage de $z_0 = 0$ à l'intérieur de disque $D(0,1)$.

Exercice 5. Soit la fonction

$$g(z) = \frac{2}{(1+z)^3}.$$

Développer la fonction g en série de Taylor au voisinage de $z_0 = 0$ à l'intérieur de disque $D(0,1)$.

Exercice 6. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}.$$

Développer la fonction f en série de Laurent sur les couronnes suivantes :

① $\|z\| < 1$. ② $1 < \|z\| < 4$. ③ $4 < \|z\| < \infty$.

Exercice 7. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{z - \pi}.$$

① Trouver les points singulier de la fonction f et déterminer leurs type.

② Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de chaque point singulier.

③ Déterminer le résidus de f en chaque point singulier.

Exercice 8. Même les questions que l'exercice précédent pour les fonctions

① $f(z) = \dfrac{z+i}{(z+1)(z-1)}$ ② $g(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

Exercice 9. Calculer avec le théorème de Résidus l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Exercice 10. Calculer avec le théorème de Résidus l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11. Calculer avec le théorème de Résidus les intégrales

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3 + i4\sin\theta}. \qquad \mathrm{J} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \sin\theta}.$$