

Chapitre I.

Résolution des systèmes d'équations linéaires et non linéaires par les méthodes itératives

A- Méthodes pour résolution des systèmes d'équations linéaires :

A-1 Introduction :

Les méthodes directes de résolution de systèmes linéaires fournissent une solution x au problème $Ax = b$ en un nombre fini d'opérations. Si l'ordre n de la matrice A est élevée, le nombre d'opérations est élevé et de plus, le résultat obtenu n'est pas rigoureusement exact. Dans ce chapitre on va introduire les méthodes itératives ou indirectes qui donnent une solution approximative du système d'équations linéaires. Ces méthodes sont très faciles à mettre en œuvre et à programmer, elles ne consomment pas de l'espace mémoire et donnent des résultats autant précis que l'on veut.

A-2- Principe :

Le problème consiste à trouver la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

En notation matricielle ce système s'écrit

$$Ax = b \tag{2}$$

L'objectif est de résoudre un système de type $Ax = b$. Pour cela, nous allons décomposer la matrice A en :

$$A = M - N \tag{3}$$

De sorte que M soit inversible. Ainsi, le système devient :

$$Mx = Nx + b \tag{4}$$

et nous cherchons par récurrence une suite de vecteur $x^{(i)}$ obtenu à partir d'un vecteur $x^{(0)}$ et de la relation :

$$M \cdot x^{k+1} = N \cdot x^k + b \tag{5}$$

C'est-à-dire :

$$x^{k+1} = M^{-1} N x^k + M^{-1} \cdot b \tag{6}$$

Cette relation est une relation de récurrence. Nous pouvons en déduire une relation reliant

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x \text{ à } e^{(k-1)} = x^{(k-1)} - x :$$

$$M(x^{(k)} - x) = N(x^{(k-1)} - x) \tag{7}$$

puisque $Mx = Nx + b$ et donc $e^{(k)} = M^{-1} N e^{(k-1)}$ pour $k = 1, 2, \dots$

Si on pose $B = M^{-1}N$, nous avons alors :

$$e^{(k)} = B^{(k)} e^{(0)}$$

Avec D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

E la matrice triangulaire inférieure suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

F la matrice triangulaire supérieure suivante :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtiendrons donc la décomposition $A = M - N$ à partir de différents types de regroupement de ces matrices D, E, F.

A- 3- La méthode de Jacobi

On pose :

$$M = D ; N = -(E + F)$$

ainsi, $B = M^{-1}N = D^{-1}(-E - F)$, ce qui implique :

$$x^{k+1} = D^{-1}(-E - F) x^k + D^{-1}b \tag{8}$$

et si on exprime cette relation en fonction des éléments de la matrice A, nous avons :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)}); \text{ Pour } i = 1 \dots n$$

Ce qui est équivalent a

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases} \tag{9}$$

c à d pour résoudre le système (1) on porte les termes de droite à l'itération (k) et ceux à gauche à l'itération (k+1)

En prenant une estimation initiale $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ et en utilisant le système (9) on calcule $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (9) avec $k=1$ on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon pour calculer les vecteurs $X^{(3)}, X^{(4)}, X^{(5)}, \dots$ jusqu'à la convergence.

A-4- La méthode de Gauss-Seidel :

Cette méthode utilise $M = D+E$ et $N = -F$. D'où $B = -(D+E)^{-1}F$.

Alors, on a :

$$x^{k+1} = -(D + E)^{-1}Fx^k + (D + E)^{-1}b \quad (10)$$

Le calcul de l'inverse de $D + E$ peut être évité. Si on écrit $(D + E) x^{k+1} = -F x^k + b$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \quad (11)$$

D'où

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}) \quad ; \text{ Pour } i=1 \dots n$$

Ce qui est équivalent à la formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{array} \right. \quad (12)$$

Le processus itératif se fera avec un vecteur initial en prenant une estimation initiale $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ et en utilisant le système (12) on calcule $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (12) avec $k=1$ on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon de calculer les vecteurs $X^{(3)}, X^{(4)}, X^{(5)}, \dots$ jusqu'à la convergence.

On remarque donc que la méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi en effet elle rend le processus itératif plus rapide.

Le système réduit reste le même sauf que la nouvelle valeur de $x_i^{(k+1)}$ obtenue dans la i ème équation sera injectée dans la suivante.

Partons de la méthode de Jacobi, le calcul des vecteurs $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots$ mène à la convergence, cela veut dire que chaque nouveau vecteur est meilleur que le précédent. On remarque dans la méthode de Jacobi que pour calculer la composante $x_2^{(2)}$ du vecteur $X^{(2)}$ on utilise celles de $X^{(1)}$ bien que $x_1^{(2)}$ est déjà calculée et elle est meilleure que $x_1^{(1)}$. D'ici vient le

principe de la méthode de Gauss-Seidel, on utilise chaque composante dès qu'elle sera calculée. Ainsi, pour calculer la composante $x^{(k+1)}$, on utilise toutes les composantes de $x_1^{(k+1)}$ à $x_{i-1}^{(k+1)}$ déjà calculées à l'itération $(k+1)$ en plus de celles $x_{i+1}^{(k)}$ à $x_n^{(k)}$ qui ne sont qu'à l'itération (k) .

A-5- Condition de convergence des méthodes itératives

Pour que les méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires convergent il faut que la matrice A soit à diagonalement dominante ce qui est très facile à vérifier.

On dit qu'une matrice est diagonalement dominante si la valeur absolue de l'élément de la diagonale est supérieure à la somme des valeurs absolues de tous les autres éléments sur la même ligne. On écrit donc :

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}| \quad (13)$$

Avec i variable entre 1 et n le nombre de lignes ou de colonnes de la matrice.

A-6- Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel

On arrête les calculs pour ces méthodes lorsque la différence absolue entre deux itérations successives soit inférieure à une certaine précision ϵ donnée.

$$|x^{(n+1)} - X^{(n)}| < \epsilon \quad (14)$$

Ici, il faut vérifier la différence pour toutes les composantes une par une.

$$|x_1^{(n+1)} - X_1^{(n)}| < \epsilon, |x_2^{(n+1)} - X_2^{(n)}| < \epsilon, \dots, |x_n^{(n+1)} - X_n^{(n)}| < \epsilon$$

B- Méthodes pour résolution des systèmes d'équations non linéaires

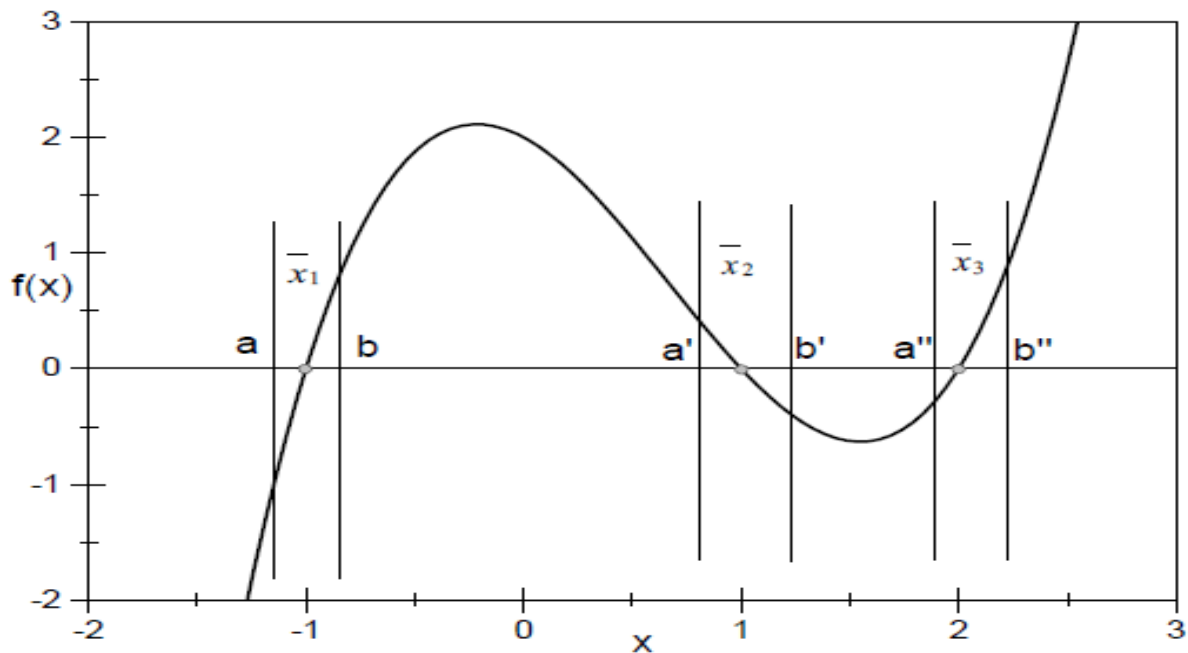
Dans cette partie on va étudier une méthode pour la résolution des équations non linéaires.

Comme exemple de ces équations, on peut citer

$\mathbf{f(x)} = \sin(\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{f(x)} = \ln(\mathbf{x}) - 2\mathbf{x} + 3 = \mathbf{0}$. Ces équations ne possèdent pas une ou des racines exactes qui peuvent être calculées directement, c'est pourquoi on fait recours aux méthodes numériques pour trouver les solutions approchées de ces équations. Les racines calculées sont autant précises que l'on veut surtout lorsqu'on dispose des moyens de calcul. Ces méthodes numériques permettent seulement le calcul d'une seule racine sur un intervalle bien choisi. Donc si l'équation possède plus d'une racine, il est nécessaire de les localiser dans des intervalles choisis soigneusement et de faire le calcul pour chaque racine à part.

B-1- Localisation des racines d'une équation $f(x)=0$.

Soit l'équation $f(x)=0$ dont on cherche la solution sur un intervalle $[a,b]$, on commence par un tracé grossier de la fonction sur l'intervalle donnée puis on isole chaque racine dans un sous intervalle le plus étroit possible. La Figure.ci dessous montre le tracé d'une fonction f qui coupe l'axe des x en trois points, c'est-à-dire que l'équation $f(x)=0$ possède trois racines, on note les racines exactes par \bar{x}_1 , \bar{x}_2 et \bar{x}_3 .



On remarque que la fonction est continue sur chaque sous intervalle, aussi chaque sous intervalle :

- Englobe une seule racine tel que $\bar{x}_1 \in [a, b]$, $\bar{x}_2 \in [a', b']$ et $\bar{x}_3 \in [a'', b'']$.
- Vérifie la condition $f(a)f(b) < 0$, $f(a')f(b') < 0$ et $f(a'')f(b'') < 0$.

La forme de l'équation $f(x)=0$ peut être compliquée, dans ce cas s'il est possible de la décomposer en deux parties simples $g(x)=h(x)$.

Par exemple $(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$, qui est assez compliqué pour le tracé, peut être décomposée en :

$$(x) = h(x) \text{ avec } g(x) = \ln(x) \text{ et } h(x) = x^2 - 2$$

Le tracé de g et h est très simple, la solution de $f(x)=0$ se situe à l'intersection de g et h .

Ensuite, on projette les points des intersections sur l'axe des x et on localise les racines. On peut facilement vérifier les intervalles trouvés en calculant $(a_i)f(b_i) < 0$.

On remarque que la fonction est continue sur chaque sous intervalle, aussi chaque sous intervalle :

- Englobe une seule racine tel que $\bar{x}_1 \in [a, b]$, $\bar{x}_2 \in [a', b]$ et $\bar{x}_3 \in [a'', b'']$.
- Vérifie la condition $f(a)f(b) < 0$, $f(a')f(b') < 0$ et $f(a'')f(b'') < 0$.

La forme de l'équation $f(x)=0$ peut être compliquée, dans ce cas s'il est possible de la décomposer en deux parties simples $g(x)=h(x)$.

Par exemple $(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$, qui est assez compliqué pour le tracé, peut être décomposée en :

$$(x) = h(x) \text{ avec } g(x) = \ln(x) \text{ et } h(x) = x^2 - 2$$

Le tracé de g et h est très simple, la solution de $f(x)=0$ se situe à l'intersection de g et h .

Ensuite, on projette les points des intersections sur l'axe des x et on localise les racines. On peut facilement vérifier les intervalles trouvées en calculant $(a_i)f(b_i) < 0$.

B-2- Principe de la méthode de Newton-Raphson

C'est la méthode la plus efficace et la plus utilisée, elle repose sur le développement de Taylor. Si $f(x)$ est continue et continument dérivable dans le voisinage de \bar{x} solution exacte de $f(x)=0$, alors le développement en série de Taylor autour d'un estimé x_n proche de \bar{x} s'écrit :

$$f(\bar{x}) = f(x_n) + \frac{(\bar{x}-x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(\bar{x}-x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \dots \quad (14)$$

Si x_n est un estimé proche de \bar{x} , alors le carré de l'erreur $\epsilon_n = \bar{x} - x_n$ et les termes de degrés supérieurs sont négligeable. Sachant que $f(\bar{x}) = 0$ on obtient la relation approximative :

$$f(x_n) + (\bar{x} - x_n)f'(x_n) \approx 0$$

Donc
$$\bar{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On peut écrire la $(n + 1)^{me}$ itération approximant \bar{x} par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0,1,2, \quad (15)$$

Cette suite, si elle converge, doit converger vers la solution \bar{x} de $f(x)=0$. On remarque que $f'(x)$ doit être non nulle.

B-3- Critère de convergence de la méthode de Newton-Raphson

Soit une fonction f définie sur $[a,b]$ telle que :

- $f(a) f(b) < 0$
- $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

B-4- Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Newton-Raphson

Si la condition de convergence est vérifiée, le procédé itératif doit converger.

Cela veut dire que chaque nouvelle itération est meilleure que la précédente, de ce fait on peut dire que si on a une précision ϵ , on arrête le calcul lorsque la différence absolue entre deux approximations successives est inférieure à la précision donnée.

C'est-à-dire :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon \quad (16)$$

Si cette condition est vérifiée on prend x_{n+1} comme solution de $f(x)=0$.

Exemple :

Trouver la première racine de l'équation $f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision $\epsilon=0.0001$. On calcule la dérivée première et seconde de f et on vérifie les conditions de convergence.

On a : $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$ qui est strictement décroissante et positive sur l'intervalle donné.

$f''(x) > 0$ et $f''(x) = f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$, $f''(x) < 0$ sur l'intervalle donné. La condition de

convergence est vérifiée. On écrit donc : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - x_n^2 + 2}{\frac{1}{x_n} - 2x_n}$

($n=0,1,2,\dots$).

Commençons $x_0=0.3$ le milieu de l'intervalle initial donné :

$$n = 0, x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0) - x_0^2 + 2}{\frac{1}{x_0} - 2x_0} = 0.0417$$

On calcule $|x_1 - x_0| > \epsilon$;

On continue $n = 1, x_2 = 0.0910$.

On calcule $|x_2 - x_1| > \epsilon$

On continue $n = 2, x_3 = 0.1285$.

On calcule $|x_3 - x_2| > \epsilon$;

On continue $n = 3, x_4 = 0.1376$.

On calcule $|x_4 - x_3| > \epsilon$

On continue $n = 4, x_5 = 0.1379$.

On calcule $|x_5 - x_4| > \epsilon$

On continue $n = 5, x_6 = 0.1379$. **La solution est $x_5 = 0.1379$**