

M2 FLUIDES COMPLEXES ET MILIEUX DIVISÉS

ÉLASTICITÉ

Notes de cours

2016 - 2017

Florence Elias
florence.elias@univ-paris-diderot.fr
01 57 27 62 50

Table des matières

1	Introduction à l'élasticité	5
2	Théorie de l'élasticité	17
3	Ondes élastiques	45
4	Flexion faible des poutres	53
5	Flambage d'une poutre (<i>buckling</i>)	63

Références bibliographiques :

- « Le cours de Physique de Feynman », Electromagnétisme, tome 2, chapitres 38, 39 et 31.
- « Theory of Elasticity », L. D. Landau et E. M. Lifshitz.

Chapitre 1

Introduction à l'élasticité

1.1 Qu'est-ce que l'élasticité ? Définition

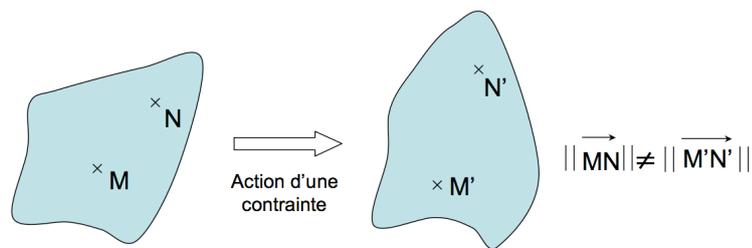


FIGURE 1.1 – Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte

Elasticité = Mécanique des corps solides déformables (par opposition à la mécanique du point ou des corps indéformables).

La **mécanique** étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués.

(Note : pour les milieux visco-élastiques, on parle aussi de **rhéologie** : leur réponse à des forces / moments / pressions appliqués)

Forces ou moments (contraintes) qui s'exercent sur un objet fait d'un matériau donné, de forme donnée et de volume donné \rightarrow translation, rotation, déformation (changement de forme et de volume).

La mécanique du point ou du solide indéformable étudie la translation et la rotation, l'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation (Fig. 1.1).

On distingue élasticité *linéaire* et *non-linéaire*. Dans ce cours : on s'intéresse à l'élasticité linéaire.

1.2 Pourquoi étudier l'élasticité ?

- **Stabilité et instabilité des structures mécaniques**

- Pour la construction de ponts, routes, structures en béton (immeubles ...) → forme d'un profilé, taille maximale d'un immeuble, ... ,
- Fibres, tissus synthétiques, ... (peau (artificielle?))
- Comprendre des phénomènes naturels (certains reliefs montagneux, mouvement rapide des végétaux, etc).

- **La géométrie est importante.**

- Exemple des poutres profilées utilisées dans le bâtiment,
- Exemple du caoutchouc = un élastomère préparé en tubes, en rubans, en fines pellicules (verniss, sols), en câbles, en tissus, ...

- **Fluides viscoélastiques : modification de la rhéologie des matériaux complexes par rapport à celle des fluides simples**

- Solutions de polymères, gels, caoutchoucs, pâtes, poudres, sables, cristaux liquides, mousses et émulsions, ...

1.3 Du microscopique au macroscopique

Quelle est l'origine microscopique de l'élasticité ?

À température ambiante, le potentiel thermodynamique à considérer est l'énergie libre

$$\mathcal{F} = U - TS$$

où U est l'énergie interne, S l'entropie et T la température.

→ Le minimum d'énergie libre correspond à un minimum d'énergie interne ou à un maximum d'entropie.

- **Modèle cristallin**

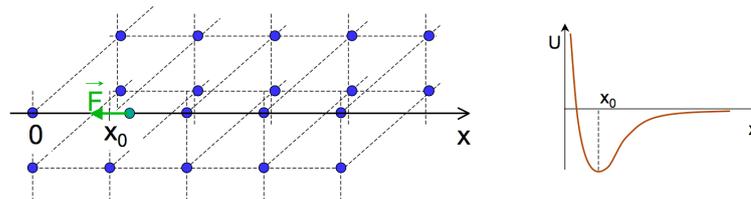


FIGURE 1.2 – Le déplacement relatif des atomes d'un cristal s'accompagne de forces de rappel élastique \vec{F} au niveau microscopique.

Au niveau microscopique : atomes en interaction. Exemple du cristal (Fig. 1.2) : la distance d'équilibre entre atomes correspond à un minimum énergétique (puits de potentiel). Si on tire

sur le matériau, on écarte les atomes de leur position d'équilibre. Augmentation d'énergie donc force de rappel - Voir Fig. 1.2.

Exemple : le potentiel de Lennard-Jones (lorsque les atomes s'attirent via des interactions dipolaires de type van der Waals) :

$$U = U_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right] = U_0 f \left(\frac{x_0}{x} \right)$$

Le premier terme de droite en x^{-12} rend compte de façon empirique d'une répulsion à courte portée (effet de volume exclu, qui est un effet purement quantique : principe d'exclusion de Pauli); le second terme de droite en $-x^{-6}$ correspond à l'attraction de van der Waals entre moments dipolaires.

Au voisinage immédiat de x_0 :

$$U \propto (x - x_0)^2$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x \propto -2(x - x_0) \vec{e}_x$$

Force de rappel élastique.

Note : dans le cas du potentiel de Lennard-Jones on a $F = kx$ avec $k = \frac{U_0}{r_0^2} f''(1)$.

Matériau différent : atomes différents : l'énergie d'interaction est différente \rightarrow pas la même résistance : comportement élastique différent (matériau plus dur ou plus mou).

Exemple de l'acier trempé : atomes de fer en structure cubique centrée (« fer α ») \rightarrow chauffage $\simeq 800^\circ$ (température d'austénitisation) \rightarrow structure cubique face centrée (« fer γ ») qui possède des sites interstitiels plus grands : le carbone se dissout mieux dans le fer γ que dans le fer α \rightarrow refroidissement rapide (sinon le carbone précipite). L'acier trempé est plus dur que le fer. La dureté est proportionnelle à la teneur en carbone.

Les défauts d'arrangement cristallin ont aussi un rôle. Si beaucoup de joints de grain \rightarrow matériau plus mou (Voir les radeaux de bulles de Bragg - Fig. 1.3).

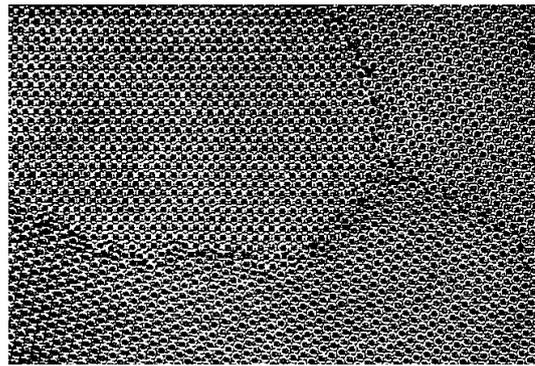


FIGURE 1.3 – Radeaux de bulles de Bragg. Les bulles de même diamètre à la surface d'un bain d'eau savonneuse s'ordonnent en un réseau cristallin. Il peut y avoir cependant des défauts à cette organisation : dislocations et joints de grains. Ici, chaque domaine ordonné est bordé de joints de grains.

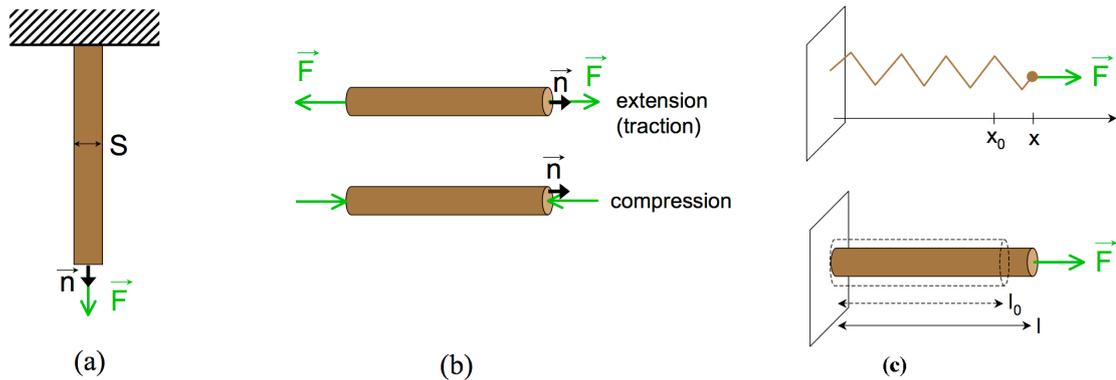


FIGURE 1.4 – Concept de contrainte normale.

• Polymères

Dans le cas des polymères ou élastomères, l'élasticité ne vient pas d'un minimum d'énergie potentielle, mais c'est un effet entropique.

Un polymère est constitué de longues chaînes carbonnées qui se comportent comme des fils flexibles. Un élastomère est un polymère réticulé, c'est-à-dire que les chaînes sont attachées entre elles par une liaison chimique.

Pour maximiser son entropie de configuration, une chaîne polymère tend à adopter une forme de pelote sphérique. Lorsqu'on applique une force mécanique extérieure on tend à déformer (étirer ou aplatisir) la pelote. Il s'exerce donc une force de rappel élastique qui tend à ramener la pelote vers la forme sphérique.

1.4 Concept de contrainte normale

On considère une barre de section constante S , faite dans un matériau parfaitement uniforme et isotrope. La barre est attachée à un bout ; on applique au bout libre une force \vec{F} (Fig. 1.4a)

$$\text{Contrainte} : \sigma = \frac{\mathbf{F}}{S}$$

- Dimension : $[\sigma] = [force] / [surface] = [Pressure]$
- Unité : Pa.

Contrainte normale : lorsque $\vec{F} // \vec{n}$.

\vec{n} : normale à la surface. 2 possibilités (Fig. 1.4b) :

- extension (traction, tension) uniaxiale : $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$,
- compression uniaxiale : $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$.

On parle ici de contrainte uniaxiale car toutes les forces sont sur un même axe : le côtés ne sont pas contraints.

Comportement élastique linéaire :

Voir Fig. 1.4c.

- Ressort : $F_{ext} = k(x - x_0) = k\Delta x$.

$x - x_0 = \Delta x =$ allongement du ressort par rapport à sa longueur d'équilibre,

$k =$ constante de raideur du ressort. La constante de raideur dépend du matériau dont est fait le ressort. Matériau "dur" $\rightarrow k$ élevé \rightarrow il faut une force plus grande pour obtenir le même allongement.

k dépend aussi des paramètres géométriques du ressort : longueur à vide x_0 et section S : $k \propto x_0^{-1}$ et $k \propto S$ (on peut démontrer la première relation en plaçant plusieurs ressorts identiques en série, et la seconde en plaçant de ressorts identiques en parallèle).

- Par analogie : barre sous traction : $\sigma = E \varepsilon$.

$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l}$ allongement relatif de la barre. $[\varepsilon] =$ sans dimension.

$E =$ **module d'Young**. $[E] = [\sigma] = \frac{[force]}{[surface]}$. E en Pa. Le module d'Young dépend du matériau dont est fait la barre.

Note 1 : on passe de $F = k\Delta l$ (ressort) à $\sigma = E \varepsilon$ en posant $k = ES/l_0$.

Note 2 : force externe / force interne. En élasticité : on parlera toujours des forces *externes* qui s'exercent sur un élément de volume bien défini.

Exemples typiques de comportements d'un solide déformable sous contrainte :

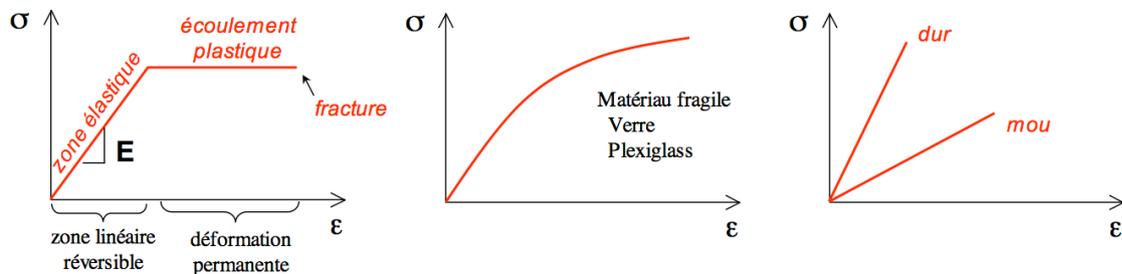


FIGURE 1.5 – Exemples typiques de comportements d'un solide déformable sous contrainte

Voir les exemples typiques sur la Fig. 1.5.

- Dans ce cours, on travaille dans la *zone linéaire*, quelque soit le matériau.
- Dans cette zone, la déformation est *réversible* : quand on relâche la contrainte, les substances retrouvent leur taille et leur forme initiales (cela n'est plus vrai quand on dépasse la limite élastique, *i.e.* quand on sort du régime linéaire).
- Matériau purement élastique : retour instantané quand on lâche la contrainte. S'il existe une *viscosité*, le système met un certain temps pour revenir à son état initial (\rightarrow comportement visco-élastique).

1.5 Elasticité linéaire : cas d'une contrainte normale uniaxiale

1.5.1 Loi de Hooke

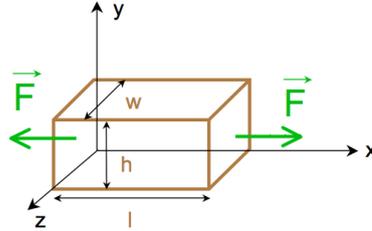


FIGURE 1.6 – Notations : le matériau parallélépipédique est soumis à une force de traction dans la direction // Ox.

Referentiel (Ox, Oy, Oz) (Fig. 1.6).

Loi de Hooke dans le cas d'une contrainte normale :

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \quad (1.1)$$

- $\varepsilon = (l - l_0)/l_0 =$ allongement relatif ou déformation (*strain*). Algébrique : possède un signe (cf extension / compression)
- $\sigma =$ contrainte (*stress*). Algébrique aussi
- $E =$ module d'Young (*Young modulus*), caractéristique du matériau. $E > 0$ (on verra la démonstration plus loin).

Domaine linéaire = $\varepsilon \ll 1$.

1.5.2 Energie libre

En général en élasticité : la température est constante \rightarrow La bonne variable thermodynamique (*i.e.* celle qu'on va minimiser) : l'Energie libre \mathcal{F} .

Déformation de traction : énergie (libre) élastique = travail à fournir (de façon réversible) pour allonger la barre à partir de son état à vide :

$$\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl}$$

$$\delta W = \sigma S dl$$

$$\delta W = E\varepsilon S dl$$

$$\delta W = ES \frac{\Delta l}{l_0} dl = E \frac{V}{l_0} \frac{\Delta l}{l_0} d(\Delta l)$$

\rightarrow Variation d'énergie libre :

$$\Delta\mathcal{F} = \int_{l_0}^l \delta W$$

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{EV}{l_0^2} \int_0^{\Delta l} \Delta l' d(\Delta l')$$

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{1}{2}EV \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2$$

Densité d'énergie libre :

$$\Delta f = \frac{\Delta\mathcal{F}}{V} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$$

Pour que le système soit stable : f minimum $\rightarrow f$ augmente quand $|\varepsilon|$ augmente.

$$\rightarrow \boxed{E \geq 0}.$$

Plus rigoureusement : minimum énergétique stable : $\frac{\partial^2 \Delta f}{\partial \varepsilon^2} \geq 0$.

1.5.3 Ordres de grandeur (pour des solides)

acier	$E \simeq 2 \cdot 10^{11}$ Pa
verre	$E \simeq 6 \cdot 10^{10}$ Pa
béton	$E \simeq 10^{10}$ Pa
Plexiglass	$E \simeq 3 \cdot 10^9$ Pa
bois, nylon	$E \simeq 10^9$ Pa
caoutchouc	$E \simeq 2 \text{ à } 20 \cdot 10^6$ Pa
peau (derme)	$E \simeq 2 \cdot 10^6$ Pa
gel de gélatine	$E \simeq 1 \text{ à } 10 \cdot 10^3$ Pa

Quel est l'allongement d'un fil de 1 m de long et de section $S = 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$ accroché au plafond, au bout duquel on fait pendre une masse de 1 kg ?

- Contrainte : $\sigma = mg/S = (1 \times 9,8)/10^{-6} \simeq 10^7 \text{ Pa}$.
- Allongement : $\Delta l = \varepsilon \times l_0 = \sigma l_0/E$.
 - Fil de nylon : $\Delta l = 1 \text{ cm}$
 - Fil de caoutchouc : $\Delta l = 5 \text{ m}$! On est sorti du domaine linéaire \rightarrow Hooke n'est pas valable.
 - Fil d'acier : $\Delta l = 50 \text{ }\mu\text{m}$.

1.5.4 Contraction transverse

Il y a une contrepartie à cet allongement : quand on étire un matériau dans une traction, il se contracte dans le plan perpendiculaire à l'étirement (Fig. 1.6).

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad ; \quad \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \quad (1.2)$$

- $\nu =$ Coefficient de poisson (*Poisson ratio* en anglais)
- $-1 \leq \nu \leq 1/2$ (on verra la démonstration plus loin)
- Comme E , ν est caractéristique du matériau.

Les relations (1.1) et (1.2) définissent le comportement élastique hookéen. L'élasticité d'un tel solide isotrope est entièrement caractérisée par la donnée de (E, ν) .

1.5.5 Principe de superposition

Dans le régime linéaire, dans le cas de petits déplacements, la superposition de plusieurs jeux de contraintes normales conduit à des allongements qui s'ajoutent algébriquement entre eux.

$$\sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

1.5.6 Méthodes de mesure

- Il existe des machines pour tester ces comportements dans la limite linéaire (et en dehors).
- Méthodes statiques : on applique $\sigma = \text{cte}$ (contrainte imposée) à $t = 0 \rightarrow$ on mesure $\varepsilon = f(t)$.
 - Méthodes dynamiques : on applique $\sigma(\omega)$ oscillant \rightarrow on mesure $\varepsilon = f(\omega)$.

On peut tester des fibres de tissu, ..., des carottes de béton.

Rhéomètres à contrainte normale : rhéomètres en traction (tension) ou en compression.

1.6 Déformation sous contrainte uniforme

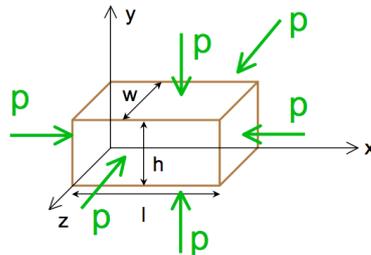


FIGURE 1.7 – Notations : le matériau est soumis à une contrainte uniforme sur toutes ses faces : ici une surpression p .

Soit un matériau de forme parallélépipédique soumis à une pression uniforme P_0 . On soumet ce matériau à une augmentation de pression p (Fig. 1.7). On cherche à décrire la déformation du matériau.

Les contraintes sur chaque paire de face sont identiques : $\sigma = -p$.

D'après la loi de Hooke dans le cas d'une contrainte normale (eq. (1.1) et (1.2)), on a (dans la limite des petites déformations) :

$$\Delta l_x/l_x = -p/E \text{ (variation relative de } l \text{ due à la contrainte sur les faces } \perp x),$$

$$\Delta l_y/l_y = +\nu p/E \text{ (variation relative de } l \text{ due à la contrainte sur les faces } \perp y),$$

$$\Delta l_z/l_z = +\nu p/E \text{ (variation relative de } l \text{ due à la contrainte sur les faces } \perp z),$$

soit :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\Delta l_z}{l_z} = -(1 - 2\nu) \frac{p}{E}.$$

De même pour les 2 autres faces :

$$\frac{\Delta w}{w} = -(1 - 2\nu) \frac{p}{E},$$

$$\frac{\Delta h}{h} = -(1 - 2\nu) \frac{p}{E}.$$

La variation relative de volume est donc (toujours dans la limite des petites déformation) :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h} = -3(1 - 2\nu) \frac{p}{E},$$

que l'on réécrit :

$$\boxed{p = -K \frac{\Delta V}{V}} \quad (1.3)$$

K : module de compression uniforme (*bulk modulus*).

Note : $K = 1/\chi_T$ où $\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$ est le coefficient de compressibilité (isotherme)

On a :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.4)$$

Tout comme E et ν , K est caractéristique du matériau. K est fonction de E et de ν : 2 grandeurs parmi K , E et ν suffisent pour caractériser l'élasticité du matériau.

Energie libre

Déformation de compression : énergie (libre) élastique = travail à fournir (de façon réversible) pour comprimer la barre à partir de son état à vide :

$$\delta W = -pdV$$

$$\delta W = - \left(-K \frac{\Delta V}{V} \right) dV$$

$$\delta W = K \frac{\Delta V}{V} d(\Delta V)$$

→ Variation d'énergie libre :

$$\Delta \mathcal{F} = \int_0^{\Delta V} \delta W$$

$$\Delta \mathcal{F} = \frac{1}{2} K V \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2$$

$$\Delta \mathcal{F} = \frac{9}{2} K V \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2$$

Densité d'énergie libre :

$$\Delta f = \frac{\Delta \mathcal{F}}{V} = \frac{9}{2} K \varepsilon^2$$

Stabilité → $K \geq 0$ → $\nu \leq 1/2$.

Ordres de grandeur

$$K \sim E.$$

$\nu = 1/2$ → fluide incompressible ($\Delta V = 0$ pour p fini).

caoutchouc	$\nu \simeq 0,5$
aluminium	$\nu \simeq 0,33$
sable	$\nu \simeq 0,2$ à $0,45$
liège	$\nu \simeq 0$
structures auxétiques	$\nu \leq 0$

1.7 Concept de contrainte de cisaillement

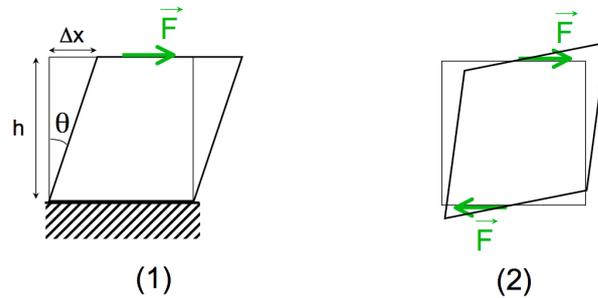


FIGURE 1.8 – Notations : le matériau est soumis à une contrainte de cisaillement.

Contrainte normale (*normal stress* en anglais) : associée à une force appliquée perpendiculairement à la face qui subit l'effort : \vec{F}/\vec{n} .

Contrainte de cisaillement (*shear stress* en anglais) : associée à des forces qui agissent dans le plan de la face considérée (Fig. 1.8) : $\vec{F} \perp \vec{n}$.

En dynamique du solide indéformable, le cas (1) aurait donné lieu à un glissement ; le cas (2) à une rotation. La réponse d'un solide élastique est une déformation de l'objet.

Loi de Hooke pour le cisaillement (démonstration dans le Feynmann) :

$$\sigma_{\text{cisail}} = G \frac{\Delta x}{h} = G\theta \quad (1.5)$$

- G = module de cisaillement (*shear modulus*) en Pa,
- θ = angle de déformation.

On a :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

G a donc le même ordre de grandeur que E .

Energie libre

Déformation de cisaillement : énergie (libre) élastique = travail à fournir cisailier le bloc :

$$\delta W = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{dx}$$

$$\delta W = \sigma S dx$$

$$\delta W = G \frac{\Delta x}{h} S d(\Delta x)$$

→ Variation d'énergie libre :

$$\Delta\mathcal{F} = \int_{l_0}^l \delta W$$

$$\Delta\mathcal{F} = GS \int_0^{\Delta x} \frac{\Delta x'}{h} d(\Delta x')$$

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{1}{2}GV \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2$$

Densité d'énergie libre :

$$\Delta f = \frac{1}{2}G\theta^2$$

Stabilité $\rightarrow \boxed{G \geq 0} \rightarrow \boxed{\nu \geq -1}$.

1.8 Résumé

Compression uniaxiale	Compression uniforme	Cisaillement
$\sigma = E\varepsilon$ $\frac{\Delta w}{w} = -\nu\varepsilon$ $E \geq 0$: module d'Young, $-1 \leq \nu \leq 1/2$: coef. de Poisson.	$\sigma = K\Delta V/V$ $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \geq 0$: module de compression.	$\sigma = G\theta$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \geq 0$: module de cisaillement.

4 coefficients élastiques, 2 relations entre eux \rightarrow il n'y a que 2 coefficients indépendants pour caractériser entièrement la déformation du matériau sous l'effet d'une contrainte.

En pratique, on utilise la paire de coefficients qui correspond le mieux à la déformation considéré. Par exemple, les expériences de rhéologie portant sur de matériaux viscoélastiques sont faites dans des rhéomètres qui appliquent au matériau des contraintes de cisaillement (rhéomètre plan / plan, cône / plan, ou Couette). On parle donc souvent de module de cisaillement. Notons que lorsque le matériau est viscoélastique, son module de cisaillement devient complexe : $G \rightarrow G^* = G' + iG''$.

Note : dans la suite du cours (théorie de l'élasticité) on utilisera une autre paire de coefficients, les coefficients de Lamé, pas bien adaptés pour décrire une situation expérimentale mais bien adaptés à la description théorique.

Chapitre 2

Théorie de l'élasticité

2.1 Introduction : pourquoi une description tensorielle ?

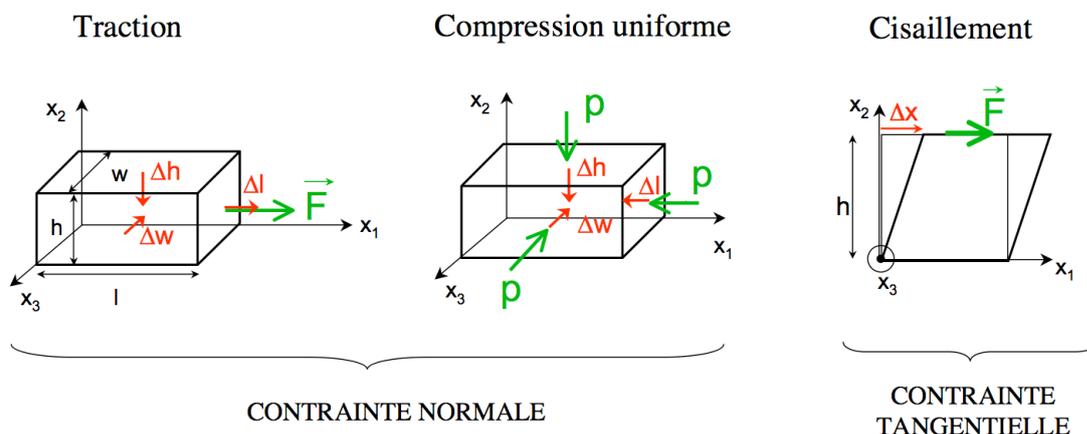


FIGURE 2.1 – Résumé : déformations sous contraintes normales et tangentielles

On a vu des exemples simples de déformations élémentaires sous des contraintes normales et tangentielles (voir le résumé Fig. 2.1). On a pu noter dans ces exemples que la contrainte est liée à la direction de la force par rapport à la normale à la face sur laquelle elle s'applique. En fonction de ces directions relatives, la déformation peut être élongationnelle ou angulaire.

Pour traiter un cas général, on pourrait traiter chaque cas comme une combinaison de cas particuliers, mais il faudrait définir des forces et déformation correspondant à chacune des déformations élémentaires, ce qui aboutirait rapidement à des calculs extrêmement compliqués. Il est en fait nécessaire de décrire le problème sous forme tensorielle. On aura donc affaire :

- **au tenseur des contraintes** $\bar{\sigma}$ (ordre 2), de composantes σ_{ik} ($i, k = 1, 2$ ou 3), où i indique la direction du vecteur force et k indique la direction de la normale à la face sur laquelle la force est appliquée. Par exemple (voir fig. 2.1) :

- traction : $\sigma_{11} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles ;
- compression uniforme : σ_{11}, σ_{22} et $\sigma_{33} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles ;
- cisaillement : $\sigma_{12} \neq 0$.

On voit donc qu'à une contrainte normale correspondent les composantes diagonales σ_{ii} du tenseur des contraintes, et qu'à une contrainte tangentielle correspond une composante non diagonale σ_{ik} avec $k \neq i$. Le tenseur des contraintes, avec toutes ses composantes, contient donc la combinaison de contraintes normales et tangentielles. La donnée du tenseur des contraintes permet de traiter le cas général sans avoir à rechercher la nature particulière de telle ou telle perturbation.

- au tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$ (ordre 2), de composantes ε_{ij} ,
- au tenseur d'élasticité $\bar{\bar{\bar{\mathcal{A}}}}$ (ordre 4), de composantes \mathcal{A}_{ijkl} .

A 3D, les tenseurs des contraintes et des déformations comportent chacun $3 \times 3 = 9$ composantes. Le tenseur d'élasticité contient $3^4 = 81$ coefficients (heureusement on pourra faire des simplifications).

La loi de Hooke dans le cas général s'exprime alors :

$$\sigma_{ik} = \sum_{j,l} \mathcal{A}_{ijkl} \varepsilon_{jl}.$$

Les coefficients élastiques E, ν, K ou G vont apparaître dans les composantes \mathcal{A}_{ijkl} du tenseur d'élasticité.

Remarque : description continue

A l'échelle microscopique, la matière est constituée d'atomes ou de molécules séparées par du vide. En mécanique des milieux continus (dont fait partie l'élasticité mais aussi l'hydrodynamique), on utilise une échelle mésoscopique, intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Cette échelle peut se représenter comme un élément de volume situé au point \vec{r} , contenant suffisamment d'atomes ou de molécules pour qu'on puisse y définir des grandeurs physiques comme la masse volumique, la pression, la température... Cet élément de volume doit par ailleurs être très petit devant la taille du corps considéré, ainsi les grandeurs définies peuvent varier dans l'espace et dans le temps.

2.2 Tenseur des déformations

2.2.1 Définition

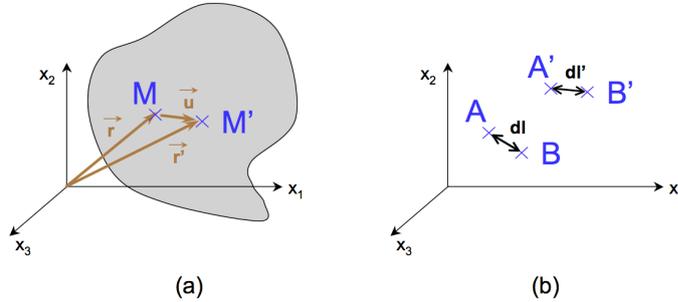


FIGURE 2.2 – Notations : (a) vecteur déplacement ; (b) Changement de distance entre 2 points au cours de la déformation.

On considère un corps qui se déforme (Fig. 2.2 (a)) : le point M se déplace en M' au cours de la déformation. Soit \vec{r} le vecteur position du point M

$$\vec{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r}' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

On définit le **vecteur déplacement** : $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 = x'_1 - x_1 \\ u_2 = x'_2 - x_2 \\ u_3 = x'_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Notation : $u_i = x'_i - x_i$ avec $i = 1, 2$ ou 3 .

Remarque : la position du point M' dépend de la position du point M (sinon on aurait une translation d'ensemble) $\rightarrow \vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ ou $u_i = u_i(\{x_j\})$. Si on connaît $\vec{u}(\vec{r})$, la déformation du corps est donc complètement déterminée. On cherche donc à calculer $\vec{u}(\vec{r})$

Comment décrire les allongements du matériau ? Soient 2 points A et B voisins qui se déplacent en A' et B' respectivement au cours de la transformation (Fig. 2.1 (b)). On a :

$$\begin{aligned} \vec{r}_A \begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ x_{A3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_B \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ x_{B3} \end{pmatrix} &\rightarrow \vec{r}'_A \begin{pmatrix} x'_{A1} \\ x'_{A2} \\ x'_{A3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_B \begin{pmatrix} x'_{B1} \\ x'_{B2} \\ x'_{B3} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A &\rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \vec{r}'_B - \vec{r}'_A \\ \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_{B1} - x_{A1} = dx_1 \\ x_{B2} - x_{A2} = dx_2 \\ x_{B3} - x_{A3} = dx_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x'_{B1} - x'_{A1} = dx'_1 \\ x'_{B2} - x'_{A2} = dx'_2 \\ x'_{B3} - x'_{A3} = dx'_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec $dx'_i = x'_{Bi} - x'_{Ai} = (x_{Bi} + u_{Bi}) - (x_{Ai} + u_{Ai}) = dx_i + du_i$.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad \rightarrow \quad \|\overrightarrow{A'B'}\| = dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$$

$$dl'^2 = \sum_i dx_i'^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2 = \sum_i (dx_i^2 + du_i^2 + 2dx_i du_i)$$

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_i du_i^2 + 2 \sum_i dx_i du_i$$

Simplification : dans le cadre des petites déformations : $du \ll dl \rightarrow$ on néglige les termes d'ordre 2 en du_i/dx_k : on néglige donc le terme $\sum_i du_i^2$ dans l'équation précédente qui devient ¹ :

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_i dx_i du_i.$$

$$\text{Or } u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad \rightarrow \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

$$\text{Notation : } \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \partial_k u_i \rightarrow \quad du_i = \sum_k \partial_k u_i dx_k.$$

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + 2 \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k \\ &= dl^2 + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k \\ &= dl^2 + \sum_i \sum_k (\partial_i u_k + \partial_k u_i) dx_i dx_k \end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ \rightarrow \quad dl'^2 &= dl^2 + \sum_{i,k} 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \end{aligned}$$

Les ε_{ik} sont les composantes d'un tenseur d'ordre 2 : le **tenseur des déformations** :

$$\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Notation d'Einstein

ou « convention de somme sur les indices répétés » : quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Cet indice est dit *muet*.

1. On peut mener le calcul sans cette simplification. Le calcul complet aboutit alors à la définition suivante des composantes du tenseur des déformations :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \sum_l \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] = \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i + \partial_i u_l \partial_k u_l) \text{ en utilisant la notation d'Einstein}$$

Par exemple : $\partial_k u_i dx_k = \sum_k \partial_k u_i dx_k$.

$$\rightarrow dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \quad (2.1)$$

2.2.2 Propriétés du tenseur des déformation

- **Tenseur d'ordre 2** (matrice 3×3) \rightarrow 9 composantes,
- **Champ de tenseur** : il dépend du point de l'espace autour duquel se fait la déformation : $\bar{\varepsilon}(\vec{r})$ autrement dit $\varepsilon_{ij}(\{r_k\})$,
- **Symétrique** : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \rightarrow$ il n'y a donc que 6 composantes indépendantes,
- **Diagonalisable** : en chaque point, il existe une base dans laquelle seuls les éléments diagonaux de $\bar{\varepsilon}$ sont non nuls.
 - Les axes de cette base = **axes principaux** ou **axes propres** du tenseur des déformations, notés $\vec{v}^{(1)}$, $\vec{v}^{(2)}$ et $\vec{v}^{(3)}$;
 - les éléments diagonaux du tenseur diagonalisé = les **valeurs principales**, ou **valeurs propres** du tenseur des déformations, notées $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ et $\varepsilon^{(3)}$.

$$\bar{\varepsilon} \vec{v}^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \vec{v}^{(i)}.$$

Dans le repère $(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \vec{v}^{(3)})$:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}.$$

La base propre et les valeurs principales du tenseur des déformation changent d'un point à l'autre.

- **La trace du tenseur des déformations est invariante par changement de base.**
Trace du tenseur = somme de ses termes diagonaux :
Trace $\{\bar{\varepsilon}\} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

2.2.3 Représentation du tenseur des déformation

De la même manière qu'un vecteur se représente par une flèche reliant deux points, un tenseur se représente par une ellipsoïde, qui a pour directions principales les directions des trois vecteurs propres et pour demi-axes les valeurs propres correspondantes (ou les valeurs propres + 1).

Dans le cas du tenseur des déformations, il est défini localement. Les déformations principales peuvent donc changer d'un point à un autre. On a donc dans le matériau un champ du tenseur des déformations, qui peut se représenter comme un champ d'ellipsoïdes de déformation.

2.2.4 Elongation relative et variation relative de volume

On se place dans la base propre de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ au point \vec{r} :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}.$$

$$(2.1) \rightarrow dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon^{(1)} dx_1^2 + 2\varepsilon^{(2)} dx_2^2 + 2\varepsilon^{(3)} dx_3^2$$

$$\text{or : } dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$\rightarrow dl'^2 = (1 + 2\varepsilon^{(1)})dx_1^2 + (1 + 2\varepsilon^{(2)})dx_2^2 + (1 + 2\varepsilon^{(3)})dx_3^2$$

dl'^2 est la somme de trois termes indépendants \rightarrow la déformation est une combinaison de trois déformations indépendantes dans les trois directions principales du tenseur des déformations.

$$dx_1 \rightarrow dx'_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon^{(1)}} dx_1 \simeq (1 + \varepsilon^{(1)})dx_1$$

$$dx_2 \rightarrow dx'_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon^{(2)}} dx_2 \simeq (1 + \varepsilon^{(2)})dx_2$$

$$dx_3 \rightarrow dx'_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon^{(3)}} dx_3 \simeq (1 + \varepsilon^{(3)})dx_3.$$

$$\rightarrow \varepsilon^{(i)} = \frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \quad (2.2)$$

La i -ième valeur principale du tenseur des déformations est donc l'extension (ou la rétractation) relative dans la direction du i -ième axe principal.

La variation de volume est :

$$dV \rightarrow dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

$$dV' = (1 + \varepsilon^{(1)})(1 + \varepsilon^{(2)})(1 + \varepsilon^{(3)})dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\simeq (1 + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)})dV.$$

$$\rightarrow \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} = \frac{dV' - dV}{dV}$$

$$\text{Trace}\{\bar{\bar{\varepsilon}}\} = \varepsilon_{ii} = \text{div}(\vec{u}) = \frac{dV' - dV}{dV} \quad (2.3)$$

Trace du tenseur des déformations est (dans n'importe quelle base) la variation relative de volume de l'élément considéré.

Note : ici on a travaillé en coordonnées cartésiennes mais il est parfois plus commode de travailler en coordonnées cylindriques ou sphériques (par exemple en coordonnées cylindriques pour décrire la torsion). On donne alors l'expression du tenseur en coordonnées cylindriques.

2.2.5 Exemples (voir figure 2.1) :

- **Traction uniaxiale :**

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{x'_1 - x_1}{x_1} = \frac{u_1}{x_1} \rightarrow \vec{u}_1 = \varepsilon x_1 \vec{e}_1$$

contraction transverse :

$$\frac{\Delta w}{w} = -\nu\varepsilon = \frac{u_2}{x_2} \rightarrow \vec{u}_2 = -\nu\varepsilon x_2 \vec{e}_2;$$

$$\frac{\Delta h}{h} = -\nu\varepsilon = \frac{u_3}{x_3} \rightarrow \vec{u}_3 = -\nu\varepsilon x_3 \vec{e}_3.$$

$$\rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon \end{pmatrix}$$

- **compression uniforme :**

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{u_1}{x_1} = \frac{u_2}{x_2} = \frac{u_3}{x_3} = -(1 - 2\nu) \frac{p}{E} = -\frac{p}{3K}$$

$$\rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = -\frac{p}{3K} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{p}{3K} \mathbb{I}$$

où \mathbb{I} est la matrice identité.

- **cisaillement simple :**

$$\frac{\Delta x}{h} = \frac{u_1}{x_2} = \theta$$

$$\rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \theta/2 & 0 \\ \theta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

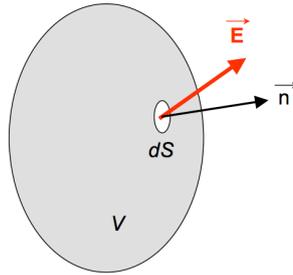


FIGURE 2.3 – Théorème de la divergence : un corps de volume V entouré par une surface S est soumis à un champ de vecteur \vec{E} .

2.3 Tenseur des contraintes

Un corps est à l'équilibre mécanique si :

- La résultante de toutes les forces agissant sur un volume quelconque du corps est nulle,
- idem pour la résultante des moments.

2.3.1 Résultante des forces

On considère un corps déformé :

- la position des molécules varie, ainsi que leur distance relative, ce qui augmente leur énergie élastique, induisant des forces de rappel entre les molécules,
- il existe donc des contraintes au sein du corps déformé.

Si le corps est à l'équilibre mécanique, alors la résultante des forces qui s'exercent sur chaque élément de volume est nulle.

Origine physique des contraintes élastiques :

Dans les trois exemples de traction, compression uniforme et cisaillement simple, on exerce de l'extérieur une force sur la surface du solide, et on déforme tout le volume. On cherche ici à établir une relation entre les forces de volume et les forces de surface.

Soit \vec{f} la densité de force extérieure (= force par unité de volume) qui induit la déformation. On considère un volume V du matériau élastique, fermé par une surface S . Les considérations ci-dessus peuvent se résumer à :

$$\int_V \vec{f} dV \quad \rightarrow \quad \int_S ? dS.$$

On cherche à transformer la somme des forces agissant sur le volume considéré en une intégrale de surface.

On utilise le théorème de la divergence (Green - Ostrogradsky) : soit un volume V entouré par une surface S et soumis à un champ de vecteur \vec{E} (voir Fig. 2.3). La normale à un élément de surface dS est notée \vec{n} et pointe vers l'extérieur du corps considéré. On a :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS.$$

Contraintes élastiques :

Le théorème de la divergence permet de passer d'une intégrale sur V à une intégrale sur S en écrivant ce scalaire comme la divergence d'un champ de vecteurs. Pour le cas qui nous intéresse ici, la grandeur intégrée sur le volume est un vecteur \vec{f} . Par analogie, on peut passer d'une intégrale sur V à une intégrale sur S en écrivant ce vecteur comme la divergence d'un champ de tenseur d'ordre 2. On aura :

$$\int_V \vec{f} dV = \oint_S \bar{\sigma} \cdot \vec{n} dS, \quad (2.4)$$

où $\bar{\sigma}$ est le **tenseur des contraintes**, défini par

$$\vec{f} = \text{div}(\bar{\sigma}) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}. \quad (2.5)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{21} + \partial_3 \sigma_{31} \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{32} \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

soit :

$$f_i = \partial_k \sigma_{ki} \quad (2.6)$$

D'après l'équation (2.4), $\bar{\sigma} \cdot \vec{n} dS$ est donc la force qui s'exerce sur la surface dS qui entoure l'élément de volume dV . Projetée sur l'axe Ox_i , l'Eq. (2.4) s'écrit (en utilisant toujours la notation d'Einstein) :

$$\int_V f_i dV = \oint_S \sigma_{ik} n_k dS, \quad (2.7)$$

En résumé, l'équation 2.4 peut s'écrire :

$$\int_V \vec{f} dV = \oint_S \vec{F} dS,$$

avec :

dans le volume : le tenseur des contraintes est associé à la densité de force (force extérieure / unité de volume) :

$$f_i = \partial_k \sigma_{ki} \quad \text{ou} \quad \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

à la surface : le tenseur des contraintes est associé à la force extérieure / unité de surface :

$$F_i = \sigma_{ik} n_k \quad \text{ou} \quad \vec{F} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}$$

Remarque

σ_{ik} est la composante selon la direction x_i de la force par unité de surface qui s'exerce sur la surface de normale n_k .

Lorsque la force $F_i = \sigma_{ik} n_k$ s'exerce sur la face de normale n_k , alors la force $F'_i = -\sigma_{ik} n_k$ s'exerce sur la face opposée de normale $-n_k$. La somme des forces est donc $F_i + F'_i = 0$: l'équilibre des forces est assuré par définition du tenseur des contraintes.

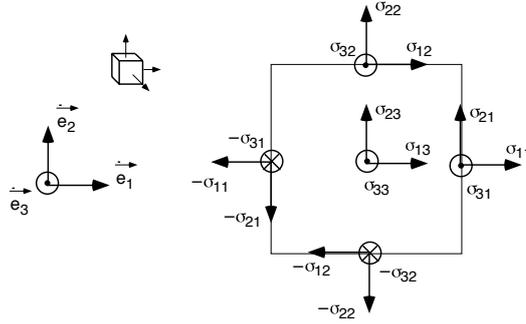


FIGURE 2.4 – Forces de surface.

2.3.2 Résultante des moments

On considère un cube dont les arêtes sont de longueur a . On choisit a suffisamment petit pour que le tenseur des contraintes soit uniforme sur le cube. Les contraintes s'exerçant sur toutes les faces du cube sont représentées sur la fig. 2.4. On voit que les contraintes tangentielles donnent lieu à des couples. Au centre du cube, la somme des moments est :

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}$$

où \vec{F} est la force appliquée à la portion \vec{r} par rapport au centre. La somme est effectuée sur toutes les faces du cube. On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= a\vec{e}_1 \wedge a^2\sigma_{21}\vec{e}_2 + a\vec{e}_1 \wedge a^2\sigma_{31}\vec{e}_3 + a\vec{e}_2 \wedge a^2\sigma_{12}\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 \wedge a^2\sigma_{32}\vec{e}_3 + a\vec{e}_3 \wedge a^2\sigma_{13}\vec{e}_1 + a\vec{e}_3 \wedge a^2\sigma_{23}\vec{e}_2 \\ &= a^3 [(\sigma_{32} - \sigma_{23})\vec{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31})\vec{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12})\vec{e}_3] \end{aligned}$$

A l'équilibre on doit avoir $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$, d'où :

$$\boxed{\sigma_{ik} = \sigma_{ki}}$$

Le tenseur des contraintes doit donc être symétrique.

Remarque : le tenseur des contraintes est donc diagonalisable.

2.3.3 Exemples : déformations élémentaires

Cas d'une traction uniaxiale

Le corps considéré est soumis à une traction uniaxiale dans la direction x_1 (Fig. 2.1). La force extérieure, parallèle à l'axe Ox_1 , s'exerce sur un élément de surface dS_1 de normale \vec{e}_1 .

La seule composante non nulle du tenseur des contraintes est donc $\sigma_{11} = F$ où F est la force extérieure par unité de surface :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

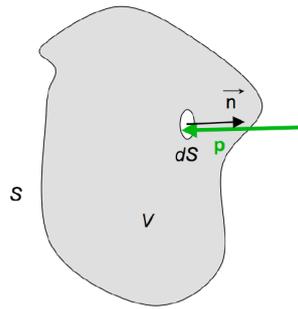


FIGURE 2.5 – Un corps de volume V entouré par une surface S est soumis à une compression uniforme p .

Cas d'une compression uniforme

Le corps considéré est soumis à une compression uniforme. Chaque unité de surface subit une pression p de même grandeur, toujours dirigée selon la normale à la surface. La force exercée sur un élément de surface dS de normale \vec{n} est :

$$\vec{F}dS = -p\vec{n}dS.$$

La projection sur x_i de \vec{F} est donc :

$$F_i dS = \sigma_{ik} n_k dS = -p n_i dS = -p \delta_{ik} n_k dS$$

où

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

δ_{ik} est le *symbole de Kronecker*. On a donc :

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} :$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \mathbb{I}.$$

Cas d'un cisaillement

Dans le cas du cisaillement représenté sur la Fig. 2.1, la force extérieure s'exerce dans la direction de Ox_1 et sur la face de normale \vec{e}_2 . La seule composante non nulle du tenseur des contraintes est donc $\sigma_{12} = F$ où F est la force extérieure par unité de surface :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note : comme $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, il existe une force extérieure qui s'exerce dans la direction de Ox_2 sur la face de normale \vec{e}_1 .

Cas général

- Les composantes diagonales du tenseur des contraintes correspondent à des **contraintes normales**
- Les composantes non diagonales correspondent à des **contraintes tangentielles**.

Notons que comme le tenseur des contraintes est diagonalisable, il existe toujours une base dans laquelle les composantes non diagonales sont nulles. Le concept de contrainte tangentielle contient donc 2 informations : celle qui correspond à la direction des forces extérieures appliquées, et celle qui correspond à la direction de la surface sur laquelle la force est appliquée. Changer de base revient ainsi à changer la direction des surfaces sur lesquelles on considère que la force est appliquée, sans modifier le tenseur des contraintes pour autant. Autrement dit, des contraintes tangentielles peuvent se réduire à des contraintes normales en changeant de base.

Pour représenter graphiquement le champ de tenseur des contraintes, on utilise l'ellipsoïde des contraintes définie localement.

2.3.4 Equilibre des corps déformés

Corps déformé sans champ de forces extérieur

Les composantes σ_{ik} du tenseur des contraintes dépendent en général de \vec{r} .

A l'équilibre, la somme des forces extérieures doit être nulle dans chaque élément de volume : $\vec{f} = \vec{0}$, soit d'après l'équation (2.5) :

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma}) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = \vec{0} \quad (2.8)$$

ou encore :

$$\partial_k \sigma_{ki} = 0. \quad (2.9)$$

(2.8) et (2.9) correspondent à l'équilibre des contraintes pour un corps déformé en l'absence de champ extérieur.

Corps déformé en présence d'un champ de forces extérieur

Si le corps déformé est soumis à un champ extérieur, par exemple le champ de pesanteur, la densité de force agissant sur un élément de volume devient :

$$\vec{f} \quad \rightarrow \quad \vec{f} + \rho \vec{g}$$

L'équation d'équilibre des forces volumiques devient donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad (2.10)$$

ou encore :

$$\partial_k \sigma_{ki} + \rho g_i = 0. \quad (2.11)$$

2.4 Loi de Hooke

2.4.1 Thermodynamique de la déformation

On considère un corps soumis à une déformation, et on décompose la déformation en une succession de déformations infinitésimales. Pour un corps de volume V soumis à une surpression p isotrope, la variation infinitésimale du travail des forces de pression par unité de volume est :

$$\delta W_{ext} = -p\delta V/V.$$

De façon générale, on peut montrer (non fait dans le cadre de ce cours) que le travail par unité de volume des contraintes à exercer pour déformer le corps s'exprime :

$$\delta W_{ext} = \sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik}$$

En général, le corps déformé est en équilibre avec un thermostat. La variable thermodynamique appropriée est l'énergie libre. La variation de l'énergie libre par unité de volume est :

$$d\mathcal{F} = d(U - TS) = -SdT + \sigma_{ik}d\varepsilon_{ik}.$$

où U est l'énergie interne par unité de volume du corps considéré. On peut donc écrire le tenseur des contraintes comme une dérivée de l'énergie libre :

$$\boxed{\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T} \quad (2.12)$$

2.4.2 Première forme de la loi de Hooke

Pour résoudre un cas concret de déformation, il faut écrire l'énergie libre \mathcal{F} du corps en fonction du tenseur des déformations. La déformation d'équilibre est alors celle qui minimise \mathcal{F} . Si le corps est isotrope, et que la déformation est petite et sans changement de température, on peut écrire \mathcal{F} comme un développement en série des puissances de ε_{ik} :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + a \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} + b \text{ (termes d'ordre 2 en } \varepsilon_{ik}) + ..$$

- On considère que le corps non déformé n'est le siège d'aucune contrainte, *i.e.* $\sigma_{ik} = 0$ lorsque $\varepsilon_{ik} = 0$. D'après l'équation (2.12), cela signifie qu'il n'y a **pas de terme linéaire** dans le développement de \mathcal{F} , soit $a = 0$.
- Au second ordre, il existe deux scalaires invariants par changement de base et indépendants, formés à partir des composantes ε_{ik} du tenseur des déformations : $(\varepsilon_{ll})^2$ et $\sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2$.

$$\rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{ll})^2 + \mu \sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2 \quad (2.13)$$

en s'arrêtant à l'ordre 2 en ε_{ik} . λ et μ sont les **coefficients de Lamé**. Pour que la déformation s'accompagne d'une augmentation de l'énergie libre par rapport à l'état non déformé il faut :

$$\lambda, \mu > 0.$$

D'après l'équation (2.13), on a :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F} &= \lambda\varepsilon_{ll}d\varepsilon_{ll} + 2\mu\varepsilon_{ik}d\varepsilon_{ik} \\
&= \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik}d\varepsilon_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}d\varepsilon_{ik} \\
&= (\lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik})d\varepsilon_{ik}
\end{aligned}$$

Donc d'après l'équation(2.12) :

$$\boxed{\sigma_{ik} = \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}} \quad (2.14)$$

ou encore :

$$\bar{\sigma} = \lambda\varepsilon_{ll}\mathbb{I} + 2\mu\bar{\varepsilon} \quad (2.15)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité. L'équation (2.14) relie les composantes du tenseur des contraintes à celles du tenseur des déformations : c'est **la loi de Hooke**, annoncée sous la forme

$$\sigma_{ik} = \mathcal{A}_{ikjl}\varepsilon_{jl}$$

On voit que dans les 81 composantes \mathcal{A}_{ikjl} du tenseur d'élasticité, seuls 2 coefficients sont indépendants : les coefficients de Lamé.

On peut inverser l'équation (2.14) en utilisant le fait que, d'après la même équation :

$$\sigma_{ll} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ll} \quad (2.16)$$

On obtient donc :

$$\boxed{\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right)} \quad (2.17)$$

Les équations (2.14) et (2.17) sont deux expressions équivalentes de la loi de Hooke.

2.4.3 Deuxième forme de la loi de Hooke

Il existe plusieurs expressions de la loi de Hooke, qui utilisent les coefficients d'élasticité correspondant au problème considéré. Les coefficients de Lamé sont pratiques pour établir théoriquement la loi de Hooke comme nous venons de le faire, mais ils ne correspondent pas d'emblée à une situation physique particulière (un certain type de contrainte ou de déformation).

Revenons à l'équation (2.13) et remarquons que :

- le terme ε_{ll} représente la variation relative de volume du corps au cours de la déformation. Si ce terme est nul, seule la forme du corps est modifiée : on parle de déformation de *cisaillement pur*, ou de *glissement*.
- si $\varepsilon_{ik} = Cte \times \delta_{ik}$, on est dans le cas d'une *compression uniforme* : seul le volume du corps change au cours de la déformation (mais pas sa forme).

On peut écrire :

$$\varepsilon_{ik} = (\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}$$

Le premier terme de droite représente une déformation de glissement (la trace de ce tenseur est nulle), et le second terme représente une déformation due à une compression uniforme. On a alors d'après (2.14) :

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left[(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll} \right] \\ \sigma_{ik} &= \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll})\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\boxed{\sigma_{ik} = K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll} \right)} \quad (2.18)$$

où

$$K = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \quad (2.19)$$

est le **module de compression uniforme**. La déformation à laquelle ce terme est associé dans l'équation (2.18) représente en effet une compression uniforme. Le dernier terme de l'équation (2.18) est associé à une déformation de glissement. Le coefficient μ s'appelle donc **module de glissement** ou **module de cisaillement** : $\mu = G$ où G est le module de cisaillement vu au premier chapitre de ce cours.

L'éq. (2.18) constitue la deuxième forme de la loi de Hooke. En inversant l'équation obtenue, on obtient la seconde expression de la loi de Hooke :

$$\boxed{\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll} \right)} \quad (2.20)$$

Remarques

1) On remarque ici que le lien entre ε_{ll} et σ_{ll} est déterminé par le seul module de compression uniforme K : $\sigma_{ll} = 3K\varepsilon_{ll}$, et ce quelle que soit la déformation. La donnée du tenseur des contraintes permet donc de calculer rapidement la variation relative de volume.

2) Toutes les formes de la loi de Hooke vues jusqu'ici permettent aussi de constater que lorsque le tenseur des déformations est diagonal, le tenseur des contraintes l'est également dans la même base, et vice versa.

3) L'augmentation de l'énergie libre associée à la déformation peut s'exprimer en fonction des modules K et μ : d'après (2.13) :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left[(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll} \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left[\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 + \frac{1}{9} \delta_{ik} \varepsilon_{ll}^2 + \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right) \right] \\
&= \mathcal{F}_0 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 + \mu \frac{3}{9} \varepsilon_{ll}^2 + 0 \\
&= \mathcal{F}_0 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2
\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{K}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2 \quad (2.21)$$

Application : compression uniforme

Dans le cas d'une compression, les forces extérieures s'exercent normalement à la surface du matériau, et la contrainte correspondante est égale à $-p$. On a donc :

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$$

soit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

D'après la loi de Hooke (2.20) :

$$\varepsilon_{ik} = -\frac{p}{3K} \delta_{ik}$$

soit :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{3K} \end{pmatrix}$$

La variation relative de volume est :

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_{ll} = -\frac{p}{K}$$

d'où

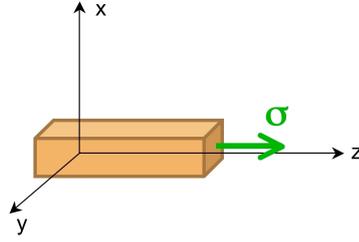
$$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{K}$$

$\frac{1}{K}$ est donc bien la compressibilité isotherme du matériau considéré.

L'augmentation d'énergie libre se calcule d'après (2.21) :

$$\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{p^2}{2K}.$$

2.4.4 Troisième forme de la loi de Hooke

FIGURE 2.6 – Barre soumise à une force de traction par unité de surface σ sur la face perpendiculaire à l'axe Oz .

On considère une barre (figure 2.6) soumise à une force de traction homogène sur la face perpendiculaire à l'axe Oz . La force par unité de surface est d'intensité σ .

La seule force non nulle est celle qui s'exerce dans la direction Oz sur la surface de normale parallèle à Oz : $\sigma_{zz} = \sigma$. Toutes les autres composantes du tenseur des contraintes sont nulles :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Utilisons la loi de Hooke (2.20) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right) \\ &= \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma \right) \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma}{9K} - \frac{\sigma}{6\mu} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma}{9K} + \frac{\sigma}{3\mu} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

On définit les **module d'Young** E et **coefficient de Poisson** ν :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma}{E} \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz}$$

D'où :

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (2.23)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \quad (2.24)$$

K et μ sont $> 0 \rightarrow E > 0$.

Par ailleurs le calcul donne :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.25)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.26)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (2.27)$$

Si on reporte ces valeurs dans les expressions établies précédemment, on obtient l'énergie libre élastique :

$$\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{ll}^2 \right]$$

Les équations (2.25) et (2.26) injectées dans (2.18) et (2.20) permettent de retrouver une troisième forme de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right] \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ik} - \nu\delta_{ik}\sigma_{ll}] \quad (2.29)$$

Application : compression uniaxiale selon Oz :

On considère la compression d'une barre maintenue sur les côtés de façon que ses dimensions latérales ne puissent pas varier (contrairement au cas de la traction uniaxiale on applique ici une contrainte sur les surfaces latérales pour les empêcher de se déplacer) :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

On obtient donc pour le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon = \sigma_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$$

En désignant la force de compression par unité de surface par $\sigma_{zz} = -p$, on a :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} p$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p \frac{\nu}{1 - \nu}$$

L'énergie libre élastique de la barre s'écrit :

$$\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{ll}^2 \right]$$
$$\mathcal{F}_{el} = \frac{p^2}{2E} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu}$$

2.5 Déformation avec changement de température

2.5.1 Energie libre

On considère des déformations qui s'accompagnent d'un changement de température homogène (la température est la même en tout point du corps).

On considère que le changement de température se fait suffisamment lentement pour que le corps soit à tout moment en équilibre thermique avec l'extérieur (c'est donc la température du milieu extérieur qui est modifiée, et celle du corps considéré s'équilibre avec celle de l'extérieur).

Dans ces conditions, l'énergie libre reste la variable thermodynamique appropriée pour décrire les états d'équilibre du système.

On choisit comme état de référence le corps non déformé : $\varepsilon_{ik} = 0$ et $\sigma_{ik} = 0$ à la température $T = T_0$.

Lorsque $T \neq T_0$, le corps se déforme même en l'absence de forces extérieures. Pour décrire cette déformation, il faut rajouter un terme dans l'expression de l'énergie libre, qui rende compte de cette dilatation thermique.

On suppose que $T - T_0 \ll T_0$. On se place dans l'hypothèse des petites déformations et on cherche à former un terme d'énergie libre de plus petit ordre possible, c'est-à-dire linéaire par rapport aux composantes du tenseur des déformations et linéaire en $T - T_0$. A partir des ε_{ik} , le seul scalaire linéaire indépendant du système de coordonnées est la trace ε_{ll} .

Sous toutes ces hypothèses, l'énergie libre (eq. (2.21)) devient :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(T) - K\alpha(T - T_0)\varepsilon_{ll} + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll} \right)^2 \quad (2.30)$$

Ici, on suppose μ , K et $\alpha =$ constantes (une petite variation de ces modules en fonction de la température conduirait à des termes d'ordre 2 que l'on néglige ici).

2.5.2 Loi de Hooke avec changement de température

On peut donc écrire la loi de Hooke à la température T :

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_T$$

$$\boxed{\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll} \right)} \quad (2.31)$$

En outre,

$$\sigma_{ll} = -3K\alpha(T - T_0) + 3K\varepsilon_{ll}$$

d'où :

$$\varepsilon_{ll} = \alpha(T - T_0) + \frac{\sigma_{ll}}{3K}$$

On obtient donc la loi de Hooke inverse avec changement de température :

$$\boxed{\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll} \right)} \quad (2.32)$$

2.5.3 Coefficient d'expansion thermique

Considérons un corps en expansion libre sous l'effet d'un changement de température. Le corps est libre, donc pas de forces extérieures, donc les contraintes sont nulles. Le tenseur des déformations s'exprime donc :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\delta_{ik}$$

soit :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\mathbb{I}$$

où \mathbb{I} est la matrice identité.

On voit que sous l'effet d'une augmentation de température, il se produit une dilatation uniforme.

La trace du tenseur des déformations donne l'augmentation relative de volume :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\delta V}{V} = \alpha(T - T_0)$$

α est donc le **coefficient d'expansion thermique** du matériau, exprimé en K^{-1} , défini par :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

La dérivée s'effectue à pression constante car on a laissé le système libre de contraintes, c'est-à-dire en pratique en équilibre à la pression atmosphérique.

2.5.4 Déformations isothermes et adiabatiques

Parmi toutes les transformations thermodynamiques existantes, les déformations isothermes et adiabatiques sont particulièrement intéressantes.

Le cas des *transformations isothermes* a été traité en détail dans les chapitres 2.1 à 2.4 : l'énergie libre décrite par l'équation (2.21) et sa dérivée par rapport aux ε_{ik} à température constante conduit à la loi de Hooke. K , μ , E et ν , sont donc respectivement le module de compression isotherme, le module de glissement isotherme, le module d'Young isotherme et le coefficient de Poisson isotherme.

Une *déformation adiabatique* se fait sans échange de chaleur entre les différentes parties du corps ni avec l'extérieur. En pratique, ce sont des déformations rapides : les échanges de chaleur n'ont pas le temps de s'établir. Dans le cas d'une transformation adiabatique : $\delta Q = 0 \rightarrow dS = 0$ (déformation isentropique). À entropie constante, le potentiel thermodynamique approprié est l'énergie interne U . Pour établir la loi de Hooke dans le cas adiabatique, il faut donc reprendre toute la démarche exposée au chapitre 2.4 en calculant cette fois-ci la variation d'énergie interne due à la déformation. Par analogie avec l'éq. (2.21), on obtient, lors d'une déformation adiabatique :

$$U = U_0 + \frac{K_{ad}}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu_{ad} \sum_{i,k} \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right)^2$$

où K_{ad} est le **module de compression adiabatique** et μ_{ad} est le **module de cisaillement adiabatique**.

Les composantes du tenseur des contraintes sont définies par :

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{dU}{d\varepsilon_{ik}} \right)_S$$

ce qui permet d'écrire la loi de Hooke dans le cas adiabatique.

Grâce aux relations issues de la thermodynamique, les modules élastiques isothermes et adiabatiques sont liés entre eux. On peut montrer (non fait dans le cadre de ce cours) que :

$$\frac{1}{K_{ad}} = \frac{1}{K} - TV \frac{\alpha^2}{C_p}$$

$$\mu_{ad} = \mu$$

$$E_{ad} = E + \frac{E^2 TV \alpha^2}{9C_p}$$

$$\nu_{ad} = \nu + (1 + \nu) \frac{ETV \alpha^2}{9C_p}$$

où C_p est la capacité calorifique du matériau à pression constante.

Les déformations adiabatiques sont celles qui se produisent en particulier lors de la propagation d'une onde élastique dans un solide (onde sonore ou onde de cisaillement). Pour traiter ce problème, ce sont les modules élastiques adiabatiques qui sont utilisés, bien que cela n'apparaisse généralement pas de façon explicite dans la notation.

2.6 Equations d'équilibre pour les corps déformés

Ces équations décrivent localement le champ du vecteur déplacement \vec{u} au sein du corps déformé.

2.6.1 En présence d'un champ de force extérieure

On part de l'équation (2.11) :

$$\partial_k \sigma_{ik} + \rho g_i = 0$$

Par ailleurs, la dérivée de loi de Hooke (2.28) donne :

$$\begin{aligned} \partial_k \sigma_{ik} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\partial_k \varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_k (\varepsilon_{ll} \delta_{ik}) \right] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \partial_k \varepsilon_{ik} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \varepsilon_{il} \end{aligned}$$

Or d'après la définition du tenseur des déformations :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i).$$

où \vec{u} est le vecteur déplacement.

On obtient donc :

$$\partial_k \sigma_{ik} = \frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l$$

D'où :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l + \rho g_i = 0 \quad (2.33)$$

En notation vectorielle, on a :

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_k^2 u_1 \\ \partial_k^2 u_2 \\ \partial_k^2 u_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_l u_l$$

Donc d'après (2.33) :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Soit :

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) = -\frac{2(1+\nu)}{E} \rho \vec{g} \quad (2.34)$$

De façon plus générale, en appelant \vec{f} la densité de forces extérieures :

$$\boxed{\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = -\frac{2(1+\nu)}{E} \vec{f}} \quad (2.35)$$

ou encore, en utilisant $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u})$ (voir formulaire) :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \vec{f}} \quad (2.36)$$

Si la déformation du corps est causée par des forces de surface (et pas par des forces volumiques), $\vec{f} = 0$ et l'équation d'équilibre devient :

$$(1-2\nu)\Delta \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = \vec{0} \quad (2.37)$$

ou bien :

$$2(1-\nu)\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - (1-2\nu)\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) = \vec{0} \quad (2.38)$$

2.6.2 En présence de gradients de température

Si le corps est échauffé de façon non uniforme, le tenseur des contraintes doit inclure le terme :

$$K\alpha(T - T_0)\delta_{ik}$$

avec $T = T(\vec{r})$. On aura donc :

$$\begin{aligned} \partial_k \sigma_{ik} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l - K\alpha \partial_i (T - T_0) \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l + \frac{E}{3(1-2\nu)} \alpha \partial_i (T - T_0) \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre (2.35) devient :

$$\boxed{\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = -\frac{2(1+\nu)}{E} \vec{f} + \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \alpha \overrightarrow{\text{grad}} T} \quad (2.39)$$

Soit, en l'absence de forces extérieures :

$$(1-2\nu)\Delta \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = \frac{2}{3}(1+\nu)\alpha \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (2.40)$$

ou encore (équation de Navier) :

$$\boxed{\frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} T} \quad (2.41)$$

2.6.3 Notions de symétrie

On traite ici des exemples de déformations très symétriques. Pour les expressions de la divergence et du rotationnel d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques et sphériques on se référera au formulaire.

A. DÉFINITIONS :

On considère un champ de vecteur $\vec{u}(\vec{r})$ qui dépend de la position du point dans l'espace.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad \text{en coordonnées cartésiennes} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \end{pmatrix} \quad \text{en coordonnées cylindriques} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_r(r, \theta, \phi) \\ u_\theta(r, \theta, \phi) \\ u_\phi(r, \theta, \phi) \end{pmatrix} \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

Invariance par translation : \vec{u} est invariant par translation dans une direction d'espace (par exemple z) lorsque ses composantes ne dépendent pas de z : $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y)$ en coordonnées cartésiennes ou $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(r, \theta)$ en coordonnées cylindriques.

Invariance par rotation : \vec{u} est invariant par rotation autour de l'axe Oz lorsque ses composantes ne dépendent pas de θ (en coordonnées cylindriques) : $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(r, z)$.

Symétrie radiale : un champ de vecteur à symétrie radiale ne dépend que de la coordonnée r et n'a qu'une composante u_r (en coordonnées sphériques) : $\vec{u}(\vec{r}) = u(r) \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire dans la direction de la coordonnée r .

Symétrie axiale : Un champ de vecteur à symétrie axiale autour de Oz ne dépend que de la coordonnée r et n'a qu'une composante u_r (en coordonnées cylindriques) : $\vec{u}(\vec{r}) = u(r) \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire dans la direction de la coordonnée r .

B. EXEMPLES DE DIVERGENCE ET ROTATIONNEL D'UN CHAMP DE VECTEURS :

La divergence mesure le défaut de conservation de volume associé à un champ de vecteurs. Le rotationnel caractérise localement la façon dont les lignes de champs tournent.

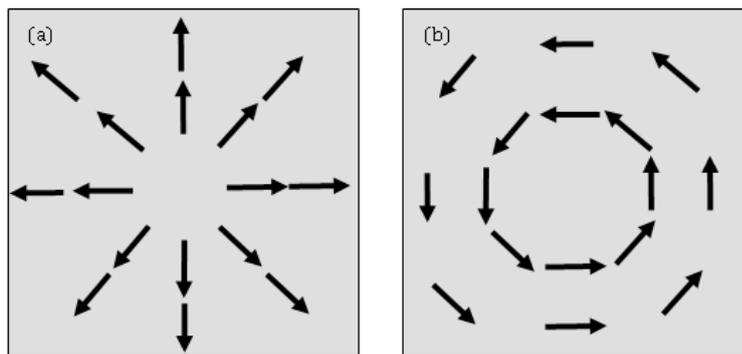


FIGURE 2.7 – Exemples de divergence et de rotationnel d'un champ de vecteur \vec{v} . (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. (b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.

C. DÉFORMATION À SYMÉTRIE RADIALE EN L'ABSENCE DE FORCES VOLUMIQUES EXTÉRIEURES :

On considère $\vec{u}(\vec{r})$ à symétrie radiale. En coordonnées sphériques :

$$\vec{u}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} u(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \partial_r \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) \right] \vec{e}_r$$

En l'absence de force volumique extérieures, l'équation d'équilibre devient :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{0}$$

$$\rightarrow \partial_r \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) \right] = 0$$

Après 2 intégrations on obtient :

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux limites.

D. DÉFORMATION À SYMÉTRIE AXIALE EN L'ABSENCE DE FORCES VOLUMIQUES EXTÉRIEURES :

On considère $\vec{u}(\vec{r})$ à symétrie axiale. En coordonnées cylindriques :

$$\vec{u}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} u(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \partial_r (r u)$$

En l'absence de force volumique extérieures :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{0}$$

$$\rightarrow \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r (r u) \right]$$

Après 2 intégrations on obtient :

$$u(r) = Cr + \frac{D}{r}$$

où C et D sont deux constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux limites.

E. DÉFORMATION DE CISAILLEMENT EN L'ABSENCE DE FORCES VOLUMIQUES EXTÉRIEURES :

On considère le cisaillement pur d'un corps cylindrique. On considère que le problème est invariant par translation dans la direction Oz de sorte que en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta(r) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \partial_r (ru_\theta) \end{pmatrix} \\ \rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{u} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r (ru_\theta) \right] \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En l'absence de force volumique extérieures :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{u} &= \vec{0} \\ \rightarrow \quad \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r (ru_\theta) \right] &= 0 \\ \rightarrow \quad u_\theta(r) &= \alpha r + \frac{\beta}{r}\end{aligned}$$

où α et β sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions aux limites.

Chapitre 3

Ondes élastiques

On considère une onde qui se propage dans un milieu élastique isotrope. On cherche ici à décrire la façon dont l'onde se propage (direction et vitesse de propagation) en fonction des caractéristiques du milieu.

Lorsqu'un ébranlement se propage sur une corde tendue avec une tension \mathcal{T} et de masse linéique μ , la vitesse de propagation de l'onde est $c = \sqrt{\mathcal{T}/\mu}$. De même, au sein d'un milieu élastique, la propagation de l'onde de vibration va dépendre de l'élasticité du milieu (l'équivalent de la tension de la corde) et de sa masse volumique.

La propagation d'une onde dans le milieu s'accompagne en général d'une variation de température dans l'espace et dans le temps. Cependant, on peut considérer que, sur une période, les échanges de chaleur n'ont pas le temps de s'établir. L'onde élastique est donc associée à une vibration adiabatique. En faisant l'hypothèse que les déformations engendrées par l'onde sont réversibles d'un point de vue thermodynamique (c'est-à-dire qu'on néglige la dissipation), on considèrera que la propagation se fait à entropie constante. Dans ce cas, les composantes σ_{ik} sont reliées aux ε_{ik} par la loi de Hooke adiabatique. De façon générale on peut utiliser la loi de Hooke et les équations d'équilibre vues dans le cas isotherme en remplaçant tous les modules élastiques isothermes (K, μ, E, ν) par les modules élastiques adiabatiques ($K_{ad}, \mu_{ad}, E_{ad}, \nu_{ad}$). C'est ce qu'on va faire ici. Cependant pour ne pas alourdir les notations on oubliera l'indice « ad » : on sous-entend donc, dans ce chapitre, que tous les modules élastiques sont les modules adiabatiques.

L'équation du mouvement d'un milieu élastique s'écrit :

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}$$

En rajoutant le terme inertiel $\rho \ddot{\vec{u}}$ dans l'équation d'équilibre (2.33), on obtient (en l'absence de forces de volume extérieures) :

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) \quad (3.1)$$

3.1 Onde élastique plane

On considère une onde élastique plane se propageant dans la direction x . Le vecteur déplacement \vec{u} est donc fonction de x et de t uniquement : $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$. Donc $\partial_y \vec{u} = \partial_z \vec{u} = \vec{0}$. L'équation (3.1), projeté sur les trois axes Ox, Oy et Oz devient :

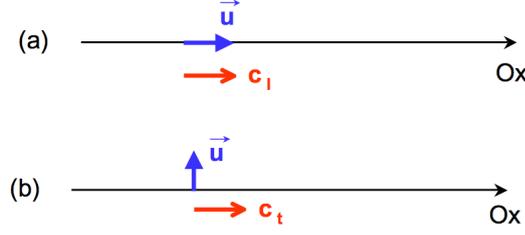


FIGURE 3.1 – (a) Onde longitudinale, (b) onde transversale.

$$\begin{aligned}\partial_x^2 u_x - \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \partial_t^2 u_x &= 0 \\ \partial_x^2 u_y - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \partial_t^2 u_y &= 0 \\ \partial_x^2 u_z - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \partial_t^2 u_z &= 0\end{aligned}$$

On définit :

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (3.2)$$

On a donc :

$$\partial_x^2 u_x - \frac{1}{c_l^2} \partial_t^2 u_x = 0, \quad \partial_x^2 u_y - \frac{1}{c_t^2} \partial_t^2 u_y = 0, \quad \partial_x^2 u_z - \frac{1}{c_t^2} \partial_t^2 u_z = 0 \quad (3.3)$$

Les équations ci-dessus sont des équations d'onde qui décrivent un ébranlement qui se propage dans la direction Ox , à la vitesse c_l ou c_t . c_l est associée à un ébranlement le long de Ox (parallèle à la direction de propagation) : il s'agit d'une **onde longitudinale**. c_t est associée à un ébranlement dans la direction Oy ou Oz (perpendiculaire à la direction de propagation) : il s'agit d'une **onde transversale**.

Une onde élastique consiste donc en deux ondes qui se propagent de façon indépendante : une onde longitudinale et une onde transverse. La vitesse de propagation c_l est toujours plus grande que c_t (car $-1 \leq \nu \leq 1/2$) :

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2(1-\nu)}} \leq \sqrt{3/4}$$

On peut exprimer les vitesses de propagation c_l et c_t en fonction du module de compression et module de cisaillement (K, μ) et en fonction des coefficients de Lamé (λ, μ) :

$$c_l = \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.4)$$

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.5)$$

Des valeurs de c_l et c_t dans des matériaux courants sont donnée figure 3.2.

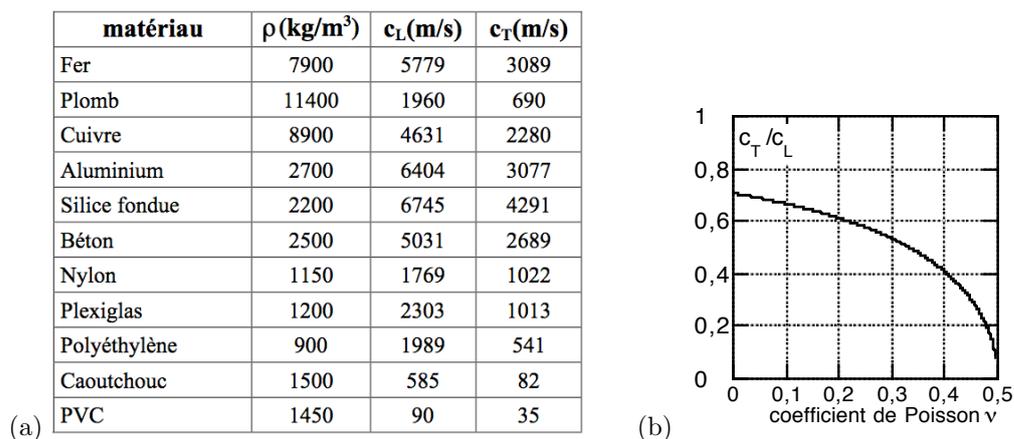


FIGURE 3.2 – (a) Valeurs des masses volumiques et de vitesses d’ondes élastiques longitudinales et transverses dans des matériaux courants. (b) Rapport entre la célérité des ondes transverse et celle des ondes longitudinales en fonction du coefficient de Poisson ν .

Onde transverse

Notons que dans le cas d’une onde transverse ($\vec{u} \perp$ direction de propagation, soit $u_x = 0$), on a $\text{div} \vec{u} = 0$. Or on sait que $\text{div} \vec{u} = \varepsilon_{ii} = \delta V/V$. L’onde transverse se propage donc dans le matériau sans variation de volume. Elle est aussi appelée **onde de cisaillement**.

Onde longitudinale

Pour une onde longitudinale ($\vec{u} //$ direction de propagation, soit $u_x \neq 0, u_y = u_z = 0$), $\text{div} \vec{u} \neq 0$. La propagation de l’onde longitudinale implique donc des compressions et des dilatations dans le matériau. En revanche, notons que $\text{rot} \vec{u} = 0$. L’onde longitudinale est également appelée **onde de compression**.

On a vu que dans un milieu solide, il pouvait y avoir à la fois propagation d’ondes longitudinales et propagation d’ondes transversales, les premières étant toujours plus rapides que les secondes.

Ainsi, les premières secousses sismiques enregistrées par un sismographe seront toujours les ondes longitudinales : on les appelle les « ondes p » (du latin primae). Les ondes transverses parviennent alors avec un décalage d’autant plus grand que l’épicentre du séisme est éloigné de la station d’enregistrement : on les appelle les « ondes s » (du latin secundae).

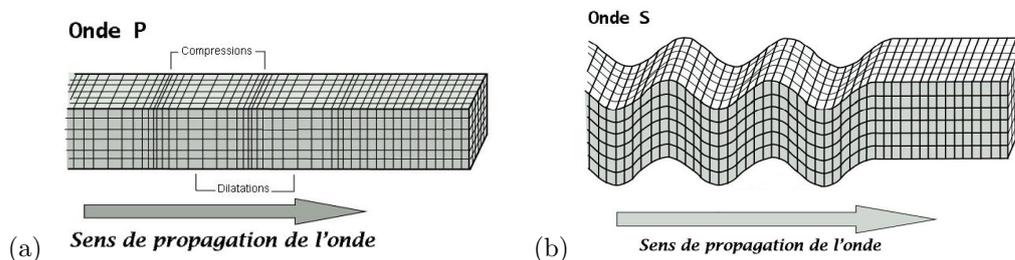


FIGURE 3.3 – (a) Onde p, (b) onde s.

3.2 Cas général

On considère le cas d'une onde élastique arbitraire (pas nécessairement plane). L'équation (3.1) peut s'écrire :

$$\ddot{\vec{u}} = c_t^2 \Delta \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) \quad (3.6)$$

Tout champ de vecteur \vec{u} peut être écrit sous la forme d'une somme de deux termes :

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$$

avec :

$$\text{div } \vec{u}_t = 0 \quad (3.7)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_l = \vec{0} \quad (3.8)$$

On obtient alors :

$$\ddot{\vec{u}}_l + \ddot{\vec{u}}_t = c_t^2 (\Delta \vec{u}_l + \Delta \vec{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}_l) \quad (3.9)$$

En prenant la divergence de l'équation (3.9) on a :

$$\begin{aligned} \text{div } \ddot{\vec{u}}_l &= c_t^2 \Delta \text{div } \vec{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \text{div } \vec{u}_l \\ &= c_l^2 \Delta (\text{div } \vec{u}_l) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{div } (\ddot{\vec{u}}_l - c_l^2 \Delta \vec{u}_l) = 0$$

D'après (3.8), on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\ddot{\vec{u}}_l - c_l^2 \Delta \vec{u}_l) = \vec{0}$$

Lorsque la divergence et le rotationnel d'un vecteur sont nuls dans tout l'espace, alors le vecteur est nul. Donc :

$$\ddot{\vec{u}}_l - c_l^2 \Delta \vec{u}_l = \vec{0} \quad (3.10)$$

En prenant le rotationnel de l'équation (3.9) on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \ddot{\vec{u}}_t &= c_t^2 \Delta \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_t + (c_l^2 - c_t^2) \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{u}_l \\ &= c_t^2 \Delta \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_t \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} A = \vec{0}$ pour tout champ de scalaire A (voir formulaire). Donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\ddot{\vec{u}}_t - c_t^2 \Delta \vec{u}_t) = \vec{0}$$

D'après (3.7), on a :

$$\text{div } (\ddot{\vec{u}}_t - c_t^2 \Delta \vec{u}_t) = 0$$

Donc :

$$\ddot{\vec{u}}_t - c_t^2 \Delta \vec{u}_t = \vec{0} \quad (3.11)$$

Conclusion : une onde élastique arbitraire est la somme de deux ondes : une onde longitudinale et une onde transverse, qui se propagent avec des vitesses respectives c_l et c_t différentes. L'onde transverse se propage sans changement de volume : c'est une onde de cisaillement. L'onde longitudinale est associée à des compressions et à des dilatations locales au cours de la propagation : c'est une onde de compression.

Remarque : comme c_l et c_t s'expriment en fonction des coefficients élastiques du milieu, on peut exprimer la loi de Hooke en fonction de ρ , c_l et c_t :

$$\sigma_{ik} = \rho (c_l^2 - 2c_t^2) \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\rho c_t^2 \varepsilon_{ik}$$

3.3 Onde monochromatique

Considérons une onde élastique monochromatique. Le vecteur déplacement s'écrit :

$$\vec{u} = \text{Re}\{\vec{u}_0(\vec{r})e^{i\omega t}\}$$

où $\vec{u}_0(\vec{r})$ est une fonction des coordonnées. L'équation (3.6) donne :

$$c_t^2 \Delta \vec{u}_0 + (c_l^2 - c_t^2) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}_0) + \omega^2 \vec{u}_0 = \vec{0}$$

En posant

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t = \text{Re}\{\vec{u}_{0l}(\vec{r})e^{i\omega t} + \vec{u}_{0t}(\vec{r})e^{i\omega t}\},$$

les parties longitudinale et transverse de l'onde monochromatique vérifient les équations d'ondes suivantes :

$$\Delta \vec{u}_{0l} + k_l^2 \vec{u}_{0l} = \vec{0}, \quad \Delta \vec{u}_{0t} + k_t^2 \vec{u}_{0t} = \vec{0}$$

où $k_l = \omega/c_l$ et $k_t = \omega/c_t$ sont les normes des vecteurs d'onde longitudinale et transverse.

3.4 Réflexion et réfraction d'une onde élastique plane monochromatique à la surface de séparation entre deux milieux élastiques différents

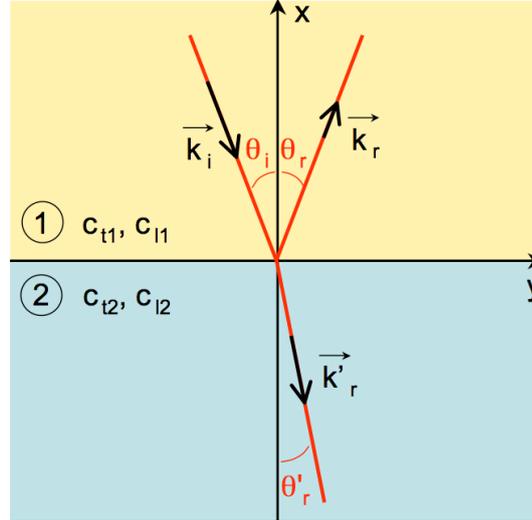


FIGURE 3.4 – Notations : réflexion (angle θ_r) et réfraction (angle θ'_r) d'une onde élastique incidente (angle θ_i) à la surface de séparation entre deux milieux élastiques différents.

On considère une onde monochromatique plane à la surface de séparation entre deux milieux élastiques différents. L'onde élastique est la combinaison de deux ondes indépendantes, l'onde longitudinale et l'onde transverse. Chaque onde se divise en une onde réfléchie et une onde réfractée par l'interface.

Le caractère de l'onde varie en général après réflexion ou réfraction :

- Une onde incidente purement transverse ou bien purement longitudinale est transformée en une onde mixte avec une partie transverse et une partie longitudinale.
- Par raison de symétrie, le caractère de l'onde ne varie pas si l'incidence est normale.

On considère l'onde représentée figure 3.4. L'onde plane incidente est de vecteur d'onde $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ et de pulsation ω . La surface de séparation entre les deux milieux 1 et 2 est le plan (Oyz) .

Pour simplifier, on choisit le repère tel que le plan d'incidence soit le plan (Oxy) . Les déplacements (complexes) associés aux ondes incidente, réfléchie et réfractée s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}\vec{u}_i &= \vec{u}_{0i} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} = \vec{u}_{0i} e^{i(\omega_i t - k_{ix} x - k_{iy} y)} \\ \vec{u}_r &= \vec{u}_{0r} e^{i(\omega_r t - k_{rx} x - k_{ry} y)} \\ \vec{u}'_r &= \vec{u}'_{0r} e^{i(\omega'_r t - k'_{rx} x - k'_{ry} y)}\end{aligned}$$

La continuité du déplacement de part et d'autre de l'interface impose :

$$\begin{aligned}\vec{u}_i(x=0) + \vec{u}_r(x=0) &= \vec{u}'_r(x=0) \\ \vec{u}_{0i}e^{i(\omega_i t - k_{iy}y)} + \vec{u}_{0r}e^{i(\omega_r t - k_{ry}y)} &= \vec{u}'_{0r}e^{i(\omega'_r t - k'_{ry}y)}\end{aligned}$$

quels que soient t et y . Cela est possible si et seulement si :

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_r = \omega'_r \\ k_{iy} &= k_{ry} = k'_{ry}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{k_y}{\omega} = \text{cste} = \frac{\sin \theta_i}{c_i} = \frac{\sin \theta_r}{c_r} = \frac{\sin \theta'_r}{c'_r} \quad (3.12)$$

Exemple : une onde incidente transverse : $c_i = c_{t1}$

Onde réfléchie transverse : $c_r = c_{t1} \rightarrow \theta_{rt} = \theta_i$

Onde réfléchie longitudinale : $c_l = c_{l1} \rightarrow \sin \theta_{rl} = (c_{l1}/c_{t1}) \sin \theta_i > \sin \theta_i$

Onde réfractée transverse : $c'_r = c_{t2} \rightarrow \sin \theta'_{rt} = (c_{t2}/c_{t1}) \sin \theta_i$

Onde réfractée longitudinale : $c'_l = c_{l2} \rightarrow \sin \theta'_{rl} = (c_{l2}/c_{t1}) \sin \theta_i$

Remarquer que les ondes réfléchies transverses et longitudinales n'ont pas la même direction de propagation. Il en est de même pour les ondes réfractées transverse et longitudinale.

Chapitre 4

Flexion faible des poutres

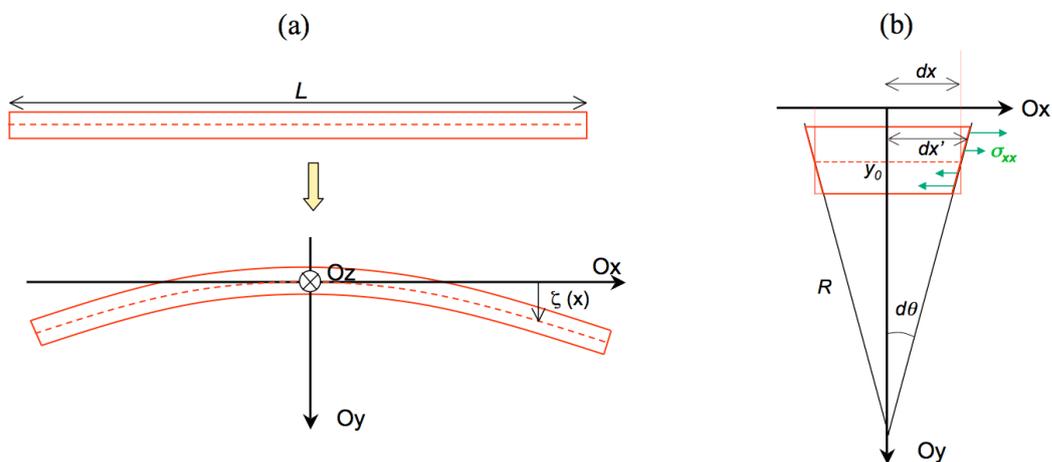


FIGURE 4.1 – (a) Flexion faible d'une poutre : notations. (b) tranche mince transversale de la poutre en flexion.

On considère une poutre de longueur L le long de l'axe Ox , et de dimensions latérales petites devant L .

La poutre est fléchie comme représenté sur la figure 4.1a avec un rayon de courbure R . La courbure de la poutre est positive si la concavité est tournée vers les $y \geq 0$ (ce qui est le cas sur la figure 4.1).

On fait les approximations suivantes :

Flexion faible : $R \gg L$,

Flexion pure : la poutre n'est soumise à aucune tension ou compression supplémentaire.

Note : le rayon de courbure dépend en général de l'abscisse x : $R = R(x)$.

4.1 Surface neutre et déformation de la poutre fléchie

Considérons une tranche mince transversale de la poutre (figure 4.1b). R est en fait la courbure d'une surface située en $y = y_0$. On voit sur la figure que :

- pour $y < y_0$, la poutre est soumise à une dilatation,
- pour $y > y_0$, la poutre est soumise à une compression.

Soit dx' la longueur d'un élément de poutre qui avait la longueur dx avant la déformation. On a $dx' > dx$ pour $y < y_0$, $dx' < dx$ pour $y > y_0$, et $dx' = dx$ pour $y = y_0$. La surface $y = y_0$ est celle dont la longueur ne varie pas au cours de la flexion : c'est la **surface neutre** de la poutre.

Calculons la déformation d'une surface de la poutre pour laquelle $y = cte$ avant la flexion. Le rayon de courbure de cette surface est égal à $R - (y - y_0)$. On a donc :

$$\frac{dx'(y)}{R - (y - y_0)} = d\theta$$

Or en $y = y_0$:

$$\frac{dx'(y_0)}{R} = d\theta = \frac{dx}{R}$$

L'allongement relatif de la surface située en y est donc :

$$\frac{dx'}{dx} = 1 - \frac{y - y_0}{R}$$

La déformation correspondante est :

$$\boxed{\varepsilon_{xx}(y) = \frac{dx' - dx}{dx} = -\frac{y - y_0}{R}} \quad (4.1)$$

4.2 Etat de contrainte de la poutre fléchie

La loi de Hooke associe à la déformation ε_{xx} une contrainte σ_{xx} . Comme la déformation consiste ici en une traction de poutre, les surfaces latérales étant libres de contrainte, on a :

$$\boxed{\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}(y) = -E \frac{y - y_0}{R}} \quad (4.2)$$

Comme les surfaces latérales sont libres, on a d'une part $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = 0$ à la surface libre $\perp Oy$, et d'autre part $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ à la surface libre $\perp Oz$. Pour pouvoir s'annuler aux bords, les contraintes σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{zy} , σ_{xz} et σ_{zz} doivent rester très petites à l'intérieur de la poutre. On les considère nulles dans un premier temps (on verra plus loin sur un exemple que le calcul prouve qu'elles sont effectivement négligeables). σ_{xx} est donc la seule composante non nulle du tenseur des contraintes.

4.3 Moment fléchissant

La contrainte σ_{xx} est associée à un moment qui tend à fléchir la barre autour du pivot (local) de la surface neutre, autrement dit un moment orienté selon l'axe Oz (voir figure 4.1b). Nous allons calculer ce moment.

Le moment infinitésimal qui s'exerce sur un élément de surface $dy dz$ perpendiculaire à l'axe Ox , situé à la hauteur y , est :

$$d\vec{m} = (y - y_0) \vec{e}_y \wedge \sigma_{xx} \vec{e}_x dy dz = -\sigma_{xx} (y - y_0) dy dz \vec{e}_z$$

On définit le **moment fléchissant** de la poutre :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_f &= \int_{S_x} d\vec{m} \\ &= - \int_{S_x} \sigma_{xx} (y - y_0) dy dz \vec{e}_z \\ &= \frac{E}{R(x)} \int_{S_x} (y - y_0)^2 dy dz \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_f &= \frac{EI_z}{R} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4.3)$$

où I_z est le moment d'inertie de la section géométrique S_x par rapport à la surface neutre :

$$I_z = \int_{S_x} (y - y_0)^2 dy dz$$

Soit $\zeta(x)$ la *flèche* de la poutre, c'est-à-dire la déflexion de la ligne neutre (fig. 4.1a). La courbure de la ligne neutre, qui est l'inverse du rayon de courbure, s'exprime :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 \zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Dans l'hypothèse de faible flexion $\frac{d\zeta}{dx} \ll 1$:

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$$

Le moment fléchissant de la poutre devient donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_f = EI_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \vec{e}_z} \quad (4.4)$$

4.4 Equations d'équilibre de la poutre fléchie

A l'équilibre, le moment fléchissant de la poutre doit être égal à la composante selon Oz du moment extérieur appliqué à la poutre pour la fléchir. Appelons M_z la composante z du moment extérieur \vec{M} . On a :

$$M_z \vec{e}_z = \vec{\mathcal{M}}_f$$

d'où l'équation d'équilibre des moments :

$$\boxed{M_z = EI_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2}} \quad (4.5)$$

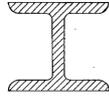


FIGURE 4.2 –
Forme de poutre
IPN utilisée dans
le bâtiment.

La poutre a donc une rigidité à la flexion qui est le produit EI_z . Si on veut augmenter la rigidité de la poutre en faisant des économies de matériau, il suffit donc de placer le plus possible de matière le plus loin possible de la ligne neutre ($y - y_0$ grand de façon à augmenter I_z). C'est ce qui explique la forme en I des poutres métalliques utilisées dans la construction de bâtiments, comme représenté sur la figure 4.2.

En général, \vec{M} est le moment d'une force extérieure \vec{F} appliquée à la poutre. Considérons une section de la poutre de longueur dx . Le moment élémentaire $d\vec{M}$ de la force \vec{F} qui fléchit la poutre est

$$d\vec{M} = dx\vec{e}_x \wedge \vec{F}$$

Soit

$$dM_z = F_y dx$$

D'où

$$F_y = \frac{dM_z}{dx}$$

F_y est appelé **effort tranchant**.

D'après (4.5) on obtient l'équation d'équilibre des forces :

$$\boxed{F_y = E \frac{d}{dx} \left(I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)} \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) est bien utile lorsque la force F_y ne dépend pas de x , par exemple dans le cas d'une force ponctuelle appliquée à l'extrémité de la poutre. Dans le cas où la force extérieure dépend de x (par exemple lorsqu'on considère le poids de la tige comme on le verra plus loin), on peut avoir de préférence affaire à la force extérieure par unité de longueur $f_y = \frac{dF_y}{dx}$ (qui est constante dans le cas de la pesanteur et d'une poutre de section constante). On a alors une équation d'équilibre des forces linéiques :

$$\boxed{f_y = E \frac{d^2}{dx^2} \left(I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)} \quad (4.7)$$

Les équations (4.5), (4.6) et (4.7) constituent les équations d'équilibre d'une poutre faiblement fléchie. Dans le cas d'une poutre de section constante, le moment d'inertie I_z ne dépend pas de x et ces équations se transforment en le système suivant :

$$M_z = EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (4.8)$$

$$F_y = EI_z \frac{d^3\zeta}{dx^3} \quad (4.9)$$

$$f_y = EI_z \frac{d^4\zeta}{dx^4} \quad (4.10)$$

4.5 Conditions aux limites

Pour trouver la forme $\zeta(x)$ d'une poutre fléchie, on a les équations d'équilibre ci-dessus et des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont de deux types :

poutre posée : impose une condition sur ζ à l'abscisse du point sur lequel repose la poutre.

poutre encastree : cela impose une condition sur la position ζ et sur la pente ζ' de la poutre au point d'encastrement.

On peut aussi avoir des conditions aux limites sur les forces ou les moments en un point de la poutre (e. g. à son extrémité). Cela se traduit, en vertu des équations d'équilibre, en une condition sur ζ'' ou sur ζ''' en ce point.

4.6 Applications

4.6.1 Déformation d'une poutre encastree soumise à une force perpendiculaire sur l'extrémité libre.

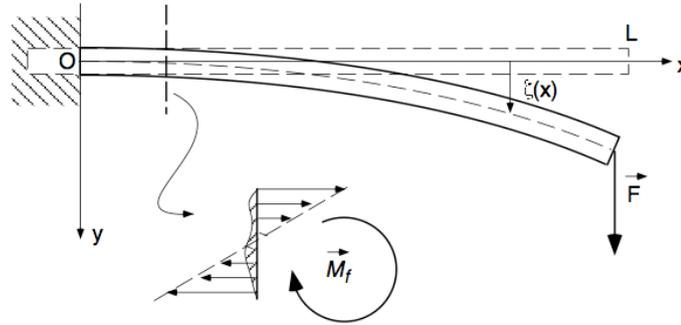


FIGURE 4.3 – Poutre encastree à une extrémité et soumise à une force à l'autre extrémité.

On considère une poutre de section rectangulaire :

- longueur L le long de l'axe Ox ,
- épaisseur h le long de Oy ,
- largeur w le long de Oz ,

avec $h, w \ll L$.

La poutre est encastree en $x = 0$. On choisit l'orientation du trièdre (Ox, Oy, Oz) de façon à ce que Ox soit parallèle à la direction d'encastrement. A l'extrémité de la poutre ($x = L$), on applique une force \vec{F} dans la direction $y > 0$ qui provoque la flexion de la poutre.

Surface neutre

Comme aucune force extérieure n'est appliquée dans la direction Ox , on doit avoir

$$\begin{aligned} \int_{S_x} \sigma_{xx} dydz &= 0 \\ w \int_0^h E \frac{y - y_0}{R} dy &= 0 \\ \int_0^h (y - y_0) dy &= 0 \\ \left[\frac{y^2}{2} - y_0 y \right]_0^h &= 0 \\ \frac{h^2}{2} - y_0 h &= 0 \\ y_0 &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

La surface neutre est située au centre de la poutre. Pour simplifier les notations, on pose $y_0 = 0$

Forme de la poutre

On considère une tranche de poutre à l'abscisse x . Le moment de la force extérieure qui s'exerce en x est :

$$\vec{M} = (\vec{r}_L - \vec{r}) \wedge \vec{F}$$

où \vec{r}_L est le point d'application de la force \vec{F} , soit :

$$M_z = F(L - x)$$

D'après l'équation d'équilibre (4.5), on a :

$$E I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = F(L - x)$$

Le moment d'inertie de la section S_x de poutre est :

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{S_x} y^2 dydz \\ &= w \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \\ &= w \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \\ I_z &= \frac{w h^3}{12} \end{aligned}$$

I_z est indépendant de x .

L'équation d'équilibre de la poutre est donc :

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$$

Soit après deux intégrations :

$$\zeta(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B$$

Or la poutre est encastree en $x = 0$:

$$\zeta(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\zeta'(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

La forme de la poutre encastree est donc :

$$\zeta(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (4.11)$$

Déviation maximale de la poutre

La flèche maximale Δ de la poutre est ici sa déviation en $x = L$:

$$\Delta = \zeta(L) = \frac{4FL^3}{Ewh^3}$$

La poutre peut être considérée comme une tige élastique linéaire : la flèche est proportionnelle à la force appliquée :

$$F = k\Delta$$

où

$$k = \frac{Ew}{4} \left(\frac{h}{L} \right)^3$$

est la constante de raideur de la poutre élastique fléchie. Plus le rapport d'aspect h/L est petit, moins la poutre présente de rigidité à la flexion.

Remarques

a) Déformation maximale :

La déformation de la poutre en (x, y) est :

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{R} \quad (4.12)$$

$$= -y \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (4.13)$$

$$= -y \frac{12F}{Ewh^3} (L-x) \quad (4.14)$$

$|\varepsilon_{xx}|$ est maximal en $x = 0$ et $|y| = h/2$:

$$|(\varepsilon_{xx})_{max}| = \frac{6FhL}{Ewh^3}$$

$$= \frac{3h}{2L} \frac{\Delta}{L}$$

$$|(\varepsilon_{xx})_{max}| \ll \frac{\Delta}{L}$$

b) Etat de contrainte de la poutre :

D'après (4.14) :

$$|\sigma_{xx}|_{max} = E |\varepsilon_{xx}|_{max} \sim \frac{FL}{wh^2}$$

Il existe aussi une contrainte tangentielle σ_{xy} liée à la force extérieure \vec{F} appliquée dans la direction Oy sur la surface de la poutre de normale \vec{e}_x :

$$\sigma_{xy} = \frac{F}{wh}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right| &\sim \frac{F}{wh} \frac{wh^2}{FL} \\ &\sim \frac{h}{L} \\ \left| \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right| &\ll 1 \end{aligned}$$

On voit bien que, dans le cas d'une poutre allongée, seule la contrainte normale σ_{xx} doit être prise en compte, comme annoncé en début de chapitre.

4.6.2 Déformation d'une poutre encastree soumise à son propre poids.

On considère la poutre rectangulaire (longueur L , largeur w , épaisseur h) encastree en $x = 0$, la direction d'encastrement étant selon l'axe Ox . La poutre est libre à son extrémité, mais est fléchie sous son propre poids.

La force extérieure exercée en x est le poids de la portion de poutre comprise entre les abscisses x et L :

$$F_y(x) = \rho g w h (L - x)$$

où ρ est la masse volumique de la poutre et g est l'accélération de la pesanteur. On peut alors utiliser l'équation d'équilibre (4.6). Mais on peut aussi remarquer que la poutre est soumise à une force linéique constante $f_y = \rho g w h$ et utiliser l'équation d'équilibre (4.7)¹. On obtient :

$$\begin{aligned} \rho g w h &= E \frac{d^2}{dx^2} \left(I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right) \\ &= \frac{E w h^3}{12} \frac{d^4 \zeta}{dx^4} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} = \frac{12 \rho g}{E h^2}$$

Après quatre intégrations :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{E h^2} \frac{x^4}{2} + A x^3 + B x^2 + C x + D$$

où A , B , C et D sont des constantes.

Conditions aux limites :

- Poutre encastree : $\zeta(0) = 0$ et $\zeta'(0) = 0 \rightarrow C = D = 0$

- Extrémité libre en $x = L$:

1. On retrouve bien $F_y(x) = \int_x^L f_y dx' = \rho g w h (L - x)$.

a) Force nulle en $x = L$

$$F_y(L) = 0$$

$$\zeta'''(L) = 0$$

$$A = -\frac{\rho g}{Eh^2} 2L$$

Donc :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2}(x^4 - 4Lx^3) + Bx^2$$

a) Moment nul en $x = L$

$$M_y(L) = 0$$

$$\zeta''(L) = 0$$

$$B = \frac{3\rho g}{Eh^2} L^2$$

Donc :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) \quad (4.15)$$

La flèche maximale de la poutre est :

$$\Delta = \zeta(L) = \frac{3\rho g L^4}{2Eh^2}$$

Chapitre 5

Flambage d'une poutre (*buckling*)

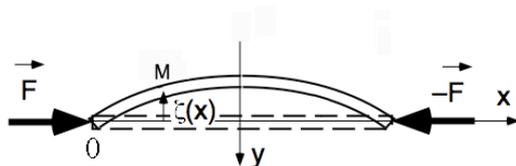


FIGURE 5.1 – Géométrie de flambage d'une poutre chargée axialement à ses extrémités libres.

On considère une poutre de longueur L et d'axe Ox chargée axialement à ses deux extrémités par deux forces $\pm F\vec{e}_x$. La barre est fixée et articulée aux deux bouts. Bien que la force ne soit pas dans la direction Oy , l'expérience que l'on peut faire en comprimant une baguette fine prouve que si la compression est suffisamment forte, la baguette fléchit.

On suppose la poutre fléchie et on note $\zeta(x)$ sa déflexion à l'abscisse x (figure 5.1).

Au point M d'abscisse x , le moment de la force extérieure \vec{F} est :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \overrightarrow{MO} \wedge \vec{F} \\ &= \zeta(x) \vec{e}_y \wedge F\vec{e}_x \\ &= -\zeta(x) F\vec{e}_z \\ M_z &= -\zeta(x)F\end{aligned}$$

L'équation d'équilibre (4.5) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} &= -\zeta(x)F \\ \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{F}{EI_z} \zeta(x) &= 0\end{aligned}$$

Si la section de la poutre est constante, alors I_z ne dépend pas de x et l'équation ci-dessus admet des solutions de la forme :

$$\zeta(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

où

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}$$

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\zeta(0) = 0 &\rightarrow A = 0 \\ \zeta(L) = 0 &\rightarrow B \sin(\alpha L) = 0\end{aligned}$$

La solution non triviale est donc :

$$\sin(\alpha L) = 0$$

Soit

$$\alpha = \frac{p\pi}{L} \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

D'où :

$$F = p^2 \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (5.1)$$

Une solution fléchie ne peut exister que si $F \geq F_c$ avec

$$F_c = \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (5.2)$$

F_c est le seuil de flambage. Pour une poutrelle hauteur h et de largeur w on a

$$F_c = \pi^2 \frac{Ewh^3}{12L^2} = \pi^2 \frac{Ewh}{12} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

La contrainte critique de flambage est donc :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{wh} = E \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{h}{L}\right)^2.$$

Plus le rapport d'aspect h/L est petit, plus le seuil de flambage est bas.

Note : si la force extérieure $F \geq F_c$ (F_c correspondant à $p = 1$) augmente, la déformation augmente elle-aussi. La tige prend les formes représentées fig. 5.2.

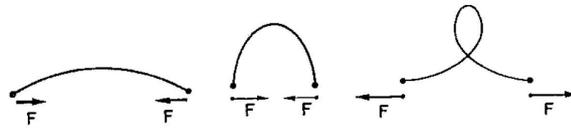


FIGURE 5.2 – Formes d'un tige ayant flambé, pour $F \geq F_c$ (grandes déformations).

Remarque : Le flambage concerne aussi les plaques minces élastiques. Il est à l'origine de certains reliefs géologiques (bosses et creux secondaires après la compression d'une masse continentale).