

TD 1 : Alphabets, mots, et Langages

Exercice 1

Si l'alphabet A contient k lettres, combien y a-t-il de mots de longueur n dans A^* ?

Combien y-t-il de mots de longueur n qui contiennent l occurrences d'une lettre fixée de A ?

Exercice 2

Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$

1. Etant donné les mots $u = aa$ et $v = bab$, écrire les mots uv , $(uv)^2$ et u^3v .

2. Énoncer tous les mots de longueur 2 définis sur A.

3. Soient les ensembles

$$E1 = \{uv / u \in A^+; v \in A^+\}$$

$$E2 = \{uv / u \in A^+; v \in A^*\}$$

$$E3 = \{uv / u \in A^*; v \in A^*\}$$

A quoi correspondent ces ensembles ?

Exercice 3

a) Donner tous les facteurs du mot $abbbaaa$.

b) Donner la liste des préfixes de $abbaa$.

c) Donner la liste des suffixes de $abcd$.

d) Combien de préfixes a un mot de longueur n ?

e) Combien de facteurs (distincts) possède le mot a^n ?

f) Combien de facteurs (distincts) possède le mot $a^m b^n$?

Exercice 4

Quel est le nombre de facteurs distincts de longueur 3, 4 et 5 des trois mots suivants de longueur 20

a) $f = abaababaabaababab$

b) $g = aaababbbbaabbabaaaab$

c) $h = abaaabaaabaabaabaa$

Exercice 5

Supposons $\Sigma = \{a, b\}$. On définit sur Σ la suite des mots $(f_n)_{n>0}$ (suite de Fibonacci) de la façon suivante: $f_1 = a$,

$$f_2 = ab \text{ et } f_{n+2} = f_{n+1} f_n, n > 0.$$

Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$f_i = \begin{cases} uab & \text{si } i \text{ pair} \\ uba & \text{si } i \text{ impair} \end{cases} \text{ où } u \text{ est un palindrome.}$$

Exercice 6

Soient $a, b \in \Sigma$ et $u \in \Sigma^*$. Montrer que si $ua = bu$ alors $a = b$ et $u \in a^*$.

Exercice 7

Décrire LM dans les cas suivants :

1. $L=\{a,bb,ccc\}$ et $M=\{d,ee,fff\}$,
2. $L= M=\{\varepsilon,a,aa\}$,
3. $L=\{a,b\}^*$ et $M=\emptyset$,
4. $L=\{aa\}$ et $M=\{a,b\}^*$,
5. $L=\{aa,aaa\}$ et $M=\{a,b\}^*$,
6. $L=\{\varepsilon,a,aa,aaa\}$ et $M=\{a,b\}^*$,

Exercice 8

Soient les langages formels suivants :

- $L_1 = \{a^i b^j / i \geq j \geq 1\}$.
- $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^+\}$.
- $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^+ / |\omega| \leq 3\}$.
- $L_4 = \{a^i b^j a^2 c^k / i \geq 1, j \geq 2, k > 1\}$.
- $L_5 = \{\omega \in \{a, b\}^* / |\omega|_a \equiv 1 [3]\}$.
- $L_6 = \{a^i b^i / i \geq 1\}$.
- $L_7 = \{\omega \in \{a, b\}^* / \exists \alpha, \beta \in \{a, b\}^+ tq : \omega = \alpha^n \beta, n \geq 2\}$.

Parmi les mots suivants, préciser quels sont ceux qui appartiennent à quels langages : ε , a, abba, abbaacc, aba, aabb, abb.

Exercice 9

Soient les langages formels suivants :

- $L_1 = \{a^i b^j, i \geq j \geq 1\}$.
- $L_2 = \{a, aa, \varepsilon\}$.
- $L_3 = \{b, ba\}$.
- $L_4 = \{\varepsilon\}$.
- $L_5 = \{a^i b^i c^k, i, k \geq 0\}$.
- $L_6 = \{a^i b^i, i \geq 1\}$.

Trouver les langages: $L_2.L_3.L_2.L_1.L_1.L_3.L_5 \cap L_1, L_6 \cup L_5, L_1.(L_2 \cap L_4), L_1.(L_2 \cap L_3), (L_1.L_2)^R, (L_1)^R.(L_2)^R$