Université Abdelhafid Boussouf - Mila -

Institut des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et informatique

Matière : Algèbre 2 **Année universitaire : 2019 - 2020**

Série 02 : Espaces vectoriels finis

Exercice 01

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u := (1, -1, 1)$ et $v := (0, 1, a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que $w := (1, 1, 2) \in \text{Vect}(u, v)$.

2. Même question pour $u = (3, 1, m), v = (1, 3, 2)$ et $w = (1, -1, 4)$.

Exercice 02

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(x, e^x, \sin x)$;
2. $(e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $((\sin x)^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 03

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les fonctions e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 et g définies par :

$$e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = \cos 2x, \quad e_3(x) = \cos 4x, \quad f_1(x) = \sin^2(x), \quad f_2(x) = \cos^2 2x, \quad g(x) = \cos^2 x.$$

On note $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ et $G = \text{Vect}(g)$.

1. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.

2. Déterminer les dimensions de E, F et G.

3. Montrer que $E \oplus G$.

Exercice 04

Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X + 1) = P(1 - X)\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer une base et la dimension de E.

3. Montrer que $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 05

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donné une base de F.

2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?

4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?

5. Donner une base de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

6. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

7. Posons $w_1 := (-1, 1, 1, 1)$ et $w_2 := (2, -2, -2, 1)$. Montrer que $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et exprimer $u = (x, y, z, t) \in F$ comme une combinaison linéaire de w_1 et w_2.