Exercices

Exercice 1. *On muni* $\mathbb{R}_+^*$ *de la loi interne notée* $\oplus$ *et définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \cdot x = x^\lambda.$$

Monter que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Solution dans la page 3

Exercice 2. $\mathbb{R}^2$ *muni de la loi interne définie par :*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2).$$

est-il un $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Solution dans la page 3

Exercice 3. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?*

(1) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$.
(2) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$.
(3) $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$.
(4) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
(5) $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$.
(6) $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
(7) $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
(8) $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$.
(9) $E_9 = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \geq 3\}$.
(10) $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X]; P' \text{ divise } P\}$.
(11) $E_{11} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est bornée }\}$.
(12) $E_{12} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est minorée }\}$.
(13) $E_{13} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f' + 2f = 0\}$.
(14) $E_{14} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}); \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

Solution dans la page 4

Exercice 4. *On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.*

(1) *Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
(2) *Montrer que $E = F \oplus G$.*

Solution dans la page 5

Exercice 5. *Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On note F l'ensemble des fonctions f de E telles que*

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

et G l'ensemble des fonctions constantes sur $[a, b]$.
Montrer que F et G sont deux sous-espace supplémentaires dans E.

Solution dans la page 5

Exercice 6. *Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que*

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H, \quad et \quad F \subset G.$$

Prouver que $F = G$.

Solution dans la page 6

Solutions

Solution d'Exercice 1 dans la page 1 :
1) $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ groupe commutatif ?
(a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x,$$

alors $\oplus$ est commutative.
(b) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (xy) \oplus z = (x \oplus y) \oplus z,$$

donc $\oplus$ est associative.
(c) C'est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1 \oplus x = 1x = x,$$

d'où 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ $(e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)} = 1)$.
(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1}{x} \oplus x = 1 = e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)}$$

donc tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ admet un élément symétrique pour la loi $\oplus$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$1_{\mathbb{R}} \cdot x = 1 \cdot x = x^1 = x.$$

3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\alpha \cdot (x \oplus y) = \alpha \cdot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha \oplus y^\alpha) = \alpha \cdot x \oplus \alpha \cdot y.$$

4) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \oplus y^\beta = \alpha \cdot x \oplus \beta \cdot x.$$

5) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\alpha\beta) \cdot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot x^\beta = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Solution d'Exercice 2 dans la page 1 : $\mathbb{R}^2$ muni avec ces deux lois n'est pas un $\mathbb{R}$ espace vectoriel car, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta)^2 x_1, (\alpha + \beta)^2 x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_1, (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_2)$$

mais

$$\alpha \cdot (x_1, x_2) + \beta \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2)x_1, (\alpha^2 + \beta^2)x_2).$$

Solution d'Exercice 3 dans la page 1 :

(1) E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car :

(a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_1$.

(b) $\forall X = (x,y,z) \in E_1$ et $\forall X' = (x',y',z') \in E_1$ on a

$$(x+x') + 2(y+y') - (z+z') = (x+2y-z) + (x'+2y'-z') = 0,$$

d'où $X + X' \in E_1$.

(c) $\forall X = (x,y,z) \in E_1$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda x + 2\lambda y - \lambda z = \lambda(x+2y-z) = 0.$$

(2) E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin E_2$.

(3)

(4) E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X = (1,0)$ et $Y = (0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X + Y = (1,1)$ n'est pas élément de E_4.

(5) Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5, donc E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(6) Posons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z = 0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(7) Prenons $(5,0,2) \in F \subset F \cup G$ et $(1,1,0) \in G \subset F \cup G$. Alors $(5,0,2) + (1,1,0) = (6,1,2)$ n'est pas élément de F car $12 + 3 - 10 = 5 \neq 0$, et il n'est pas non plus élément de G car $6 - 1 + 2 = 5 \neq 0$. Ainsi, $E_7 = F \cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(8) E_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car :

(a) $0_{\mathbb{R}[x]} = 0 \in E_8$.

(b) $\forall P_1, P_2 \in E_8$ on a

$$(P_1 + P_2)(0) = P_1(0) + P_2(0) = P_1(2) + P_2(2) = (P_1 + P_2)(2),$$

alors $P_1 + P_2 \in E_8$.

(c) $\forall P \in E_8$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P)(0) = \lambda \times P(0) = \lambda \times P(2) = (\lambda P)(2).$$

(9) Comme $0_{\mathbb{R}[x]} \notin E_9$, alors E_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(10) En Remarquant que $P_1 = X$ et $P_2 = x^2$ sont des éléments de E_{10}, mais $x + x^2 = P_1 + P_2 \notin E_{10}$ en on déduit que E_{10} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(11) Soit $f, g \in E_{11}$ et soit M_1, M_2 un majorant respectif de $|f|, |g|$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$

et

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leq |\lambda| \times M_1,$$

et comme la fonction nulle est bornée, on obtient que E_{11} est un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(12) Considérons la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors f est minorée (par 0). Mais on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-f(x) = -x^2$. Ainsi, la fonction $-f$ n'est pas minorée. Donc $f \in E_{12}$ et $-f \notin E_{12}$, d'où E_{12} n'est pas un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(13) C'est clair que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{13}$. Soient $f, g \in E_{13}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)' + 2(f+g) = f' + 2f + g' + 2g = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha f)' + 2(\alpha f) = \alpha(f' + 2f) = 0,$$

donc E_{13} est un espace vectoriel.
(14) Comme $\int_a^b 0 = 0$ alors $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{14}$. D'autre part, soient $f, g \in E_{14}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = 0$$

et

$$\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \int_a^b \times \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt = 0,$$

par suite E_{14} est un sous-espace vectoriel de .

Solution d'Exercice 4 dans la page 2 :
(1) Tout d'abord E, F, G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ensuite, la suite nulle appartient à chacun des ensembles E, F, G car elle est convergente, de limite nulle et constante. Enfin, une combinaison linéaire de suite convergentes (resp. de limite nulle, resp. constante) est convergente (resp. de limite nulle, resp. constante). Ainsi, E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(2) Une suite constante de limite nulle est nulle donc $F \cap G = \{(0)\}$.
Une suite de limite nulle ou constante est convergente donc F et G sont inclus dans E. Par conséquent $F + G \subset E$.
Soit $(u_n) \in E$: (u_n) est donc une suite convergente. Notons l sa limite. Posons $v_n = u_n - l$ et $w_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ donc $E \subset F + G$.
Par double inclusion, $E = F + G$ puis $E = F \oplus G$ puisque $F \cap G = \{(0)\}$.

Solution d'Exercice 5 dans la page 2 :
Soit f un élément quelconque de E. Posons

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

On en déduit que :

$$\int_a^b \left[f(t) - \frac{I}{b-a} \right] dt = 0,$$

ce qui prouve que

$$f - \frac{I}{b-a} \in F.$$

Comme la fonction constante $\dfrac{I}{b-a}$ est élément de G on peut écrire :

$$f = \left[f - \frac{I}{b-a}\right] + \frac{I}{b-a},$$

montrant que $E = F + G$.

Solution d'Exercice 6 dans la page 2 : Il suffit de prouver que $G \subset F$. Soit $g \in G$. Puisque $0 \in H$, il existe $f \in H$ et $h \in H$ tel que $g = f + h$. On a donc $h = g - f \in G$ et $h \in H$, ainsi $h \in G \cap H = F \cap G$ d'où $h \in F$ puis $g = f + h \in F$. On a donc prouvé que $G \subset F$.