Université Abdelhafid Boussouf - Mila -

Institut des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et informatique

Matière : Algèbre 2 **Année universitaire : 2019 - 2020**

Série 01 : Généralités sur les espaces vectoriels

Exercice 01

On muni $\mathbb{R}_+^*$ de la loi interne notée $\oplus$ et définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \cdot x = x^\lambda.$$

Monter que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 02

$\mathbb{R}^2$ muni de la loi interne définie par :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2).$$

est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 03

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

(1) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$.

(2) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$.

(3) $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$.

(4) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.

(5) $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$.

(6) $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z=0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z=0\}$.

(7) $E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z=0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z=0\}$.

(8) $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0)=P(2)\}$.

(9) $E_9 = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \geq 3\}$.

(10) $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X]; P' \text{ divise } P\}$.

(11) $E_{11} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f \text{ est bornée } \}$.

(12) $E_{12} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f \text{ est minorée } \}$.

(13) $E_{13} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}); f' + 2f = 0\}$.

(14) $E_{14} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}); \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

Exercice 04

On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

(1) Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 05

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On note F l'ensemble des fonctions f de E telles que

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

et G l'ensemble des fonctions constantes sur $[a,b]$.

Montrer que F et G sont deux sous-espace supplémentaires dans E.

Exercice 06

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H, \quad \text{et} \quad F \subset G.$$

Prouver que $F = G$.