Exercice 2. *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.*

(1) *Montrer que $(a, b) \mapsto f(a)b$ munit B d'une structure de A-module.*

(2) *Montrer que f induit un foncteur naturel $Rf : B - \mathbf{mod} \to A{-}\mathbf{mod}$ tel que $R_f(B) = B$ muni de la structure de A-module donnée par* **(1)***.*

(3) *Montrer que le produit tensoriel par B au dessus de A, $N \mapsto B \otimes_A N$, définit un foncteur $A{-}\mathbf{mod} \to B{-}\mathbf{mod}$. Montrer que ce foncteur $B \otimes_A -$ est adjoint à gauche de R_f.*

Solution 2. Cet exercice est la suite/le complément des exercices 1 de la feuille 1 et 3 de la feuille "0". Rappelons qu'un morphisme de modules n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes abéliens qui préserve l'action de l'anneau.

(1) Cette question est un résultat de cours. La linéarité à droite de la multiplication donne celle de $b \mapsto f(a)b$. Comme f est un morphisme d'anneaux on obtient sans peine

$$f(aa')b = (f(a)f(a'))b = f(a)(f(a')b), \quad f(a + a')b = f(a)b + f(a')b.$$

(2) Déjà, on doit associer à tout B-module M un A-module $R_f(M)$, c'est à dire un groupe abélien muni d'une action de A. Au vu de (**1**), on choisit $R_f(M) = M$ comme groupe abélien (et donc comme ensemble aussi). Il reste à définir la structure de A-module. On prend évidemment $(a, m) \mapsto f(a) \cdot m$ où $\cdot$ désigne l'action de B sur M. Comme en **(1)**; cela définit bien une action. Si $h : M \to N$ est un morphisme de B-module, c'est en particulier un morphisme de groupes abéliens. On prend $R_f(g) : R_f(M) \to R_f(N)$ comme étant égal à f vu comme un morphisme de groupes abéliens. Il est immédiat de vérifier que sa B-linéarité entraine sa A-linéarité pour l'action de A définie précédemment. On a aussi immédiatement $R_f(g \circ h) = R_f(g) \circ R_f(h)$ (cette propriété n'ayant rien à voir avec les actions d'anneaux d'ailleurs).

(3) Comme B est un A-module, $B \otimes_A N$ existe et est un A-module. On le munit d'une structure de B-module par la formule $(b, b' \otimes_A n) \mapsto bb' \otimes_A n$ (cf. la correction de l'exercice 3 de la feuille de TD 1). Si $M\ {}^{f}\!\!\rightarrow N$ est un morphisme de A-modules, on définit $B \otimes_A f : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ comme le morphisme $\mathrm{Id}_B \otimes f$ (c'est à dire $B \otimes_A f(b \otimes m) = b \otimes f(m)$). Il est clair que $B \otimes_A f$ est B-linéaire et qu'on a ainsi défini un foncteur $A{-}\mathbf{mod} \to B{-}\mathbf{mod}$. Il faut maintenant voir les propriétés d'adjonction. Soit $f : B \otimes_A N \to M$ une application B-linéaire. Alors pour tout b, n on a

$$f(b \otimes_A n) = f(b.(1 \otimes_A n)) = b.f(1 \otimes_A n) \tag{0.1}$$

et f est donc uniquement déterminée par $n \mapsto f(1 \otimes_A n)$. De plus l'application $\tilde{f} : n \mapsto f(1 \otimes_A n)$ est une application entre les groupes abéliens N et $M = R_f(M)$ (comme groupe abélien) et est A-linéaire (par un calcul immédiat). Il résulte de (0.1), que l'application $\mathrm{Ag}(M, N) : f \mapsto \tilde{f}$ est une bijection. Son inverse est donné par l'application $\mathrm{Ad}(M, N)(g) = (b \otimes_A n) \mapsto bg(n)$ pour tout $g : N \to R_f(M)$ (cela a bien du sens, puisque M est un B-module par hypothèse). On a donc obtenu l'existence des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B \otimes_A N, M) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(M,N)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, R_f(M)). \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(M,N)"]
\end{tikzcd}$$

Il reste à voir que ce sont des isomorphismes de bifoncteurs. C'est très facile puisque la construction de Ag et Ad ne dépend pas de M et N mais juste du fait que ce sont des A-modules et B-modules. Plus précisément; $\mathrm{Ag}(M, N)(f)(n) = f(1 \otimes_B n)$ d'où, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(M, M')$, on a

$$\begin{aligned}
R_f(g)_*\big(\mathrm{Ag}(N, M)(f)\big)(n) &= g_*\big(\mathrm{Ag}(N, M)(f)\big)(n) \\
&= g\big(f(1 \otimes_B n)\\
&= (g \circ f)(1 \otimes_B n) = \mathrm{Ag}(N, M')(g \circ f).
\end{aligned}$$

On démontre de même la commutativité du rectangle du bas du diagramme (Adj).

Remarque 1. Dans la question **(2)**, il est tentant (et intuitivement correct) de penser qu'on prend "l'identité" pour R_f. Ceci n'a évidemment pas de sens puisque que R_f est un foncteur entre deux catégories différentes. Ceci dit, si on le compose avec les foncteurs oublis $U_B : B-\mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$, $U_A : A-\mathbf{mod} \to \mathbf{Ab}$ vers la catégorie des groupes abéliens alors on a bien $U_A \circ R_f = U_B$.

Exercice 3. *(épimorphismes, monomorphismes et isomorphismes)*

(1) *Montrer que, dans la catégorie* **Set** *des ensembles, un morphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si c'est une application injective (resp. surjective).*

(2) *Montrer que, dans la catégorie* **Ring** *des anneaux, le morphisme canonique* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *est un épimorphisme.*

(3) *Montrer que dans la catégorie* **Top** *des espaces topologiques, il existe des morphismes qui sont à la fois un épimorphisme et un monomorphisme mais pas un isomorphisme (indication : considérer* $X \hookrightarrow Y$ *un sous-ensemble dense de* Y*)*

Solution 3. (1) Soit $f : A \to B$ une application injective. Alors, pour tout $g, h : X \to A$, $f \circ g = f \circ h$ implique $f(g(x)) = f(h(x))$ pour tout x et, par injectivité, $g(x) = h(x)$ ce qui donne $h = g$. Réciproquement, supposons que $f : A \to B$ est un monomorphisme. Alors pour tout $x, y \in A$ avec $f(x) = f(y)$, on définit $g_x : \{\mathrm{pt}\} \to A$ et $g_y : \{\mathrm{pt}\} \to A$ par $g_x(\mathrm{pt}) = x$ et $g_y(\mathrm{pt}) = y$. On a donc $f \circ g_x = f \circ g_y$ d'où $g_x = g_y$ (car f est un monomorphisme) et donc $x = y$.

Supposons maintenant $f : A \to B$ surjective et soit $g, h : B \to C$ avec $g \circ f = h \circ f$. Alors pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$; d'où $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$ et $g = h$. Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in B - f(A)$ (c'est à dire f non-surjective), alors soit $g : B \to \{\mathrm{pt}, \mathrm{x}\}$ l'application $b \mapsto \mathrm{pt}$ et soit $h : B \to \{\mathrm{pt}, \mathrm{x}\}$ l'application $b \in B - \{x\} \mapsto \mathrm{pt}$ et $h(x) = x$. Il est clair que $h \neq g$. Mais $g \circ f = h \circ f$ par construction. Ce qui implique que f n'est pas un monomorphisme. Conclusion : si f est un monomorphisme, elle est surjective.

(2) Un morphisme d'anneaux unitaires vérifie $f(1) = 1$. Par linéarité, cette condition détermine le morphisme canonique $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Ce morphisme n'est évidemment pas surjectif. Nous allons montrer que c'est cependant un épimorphisme dans la catégorie **Ring**. Soient $g, h : \mathbb{Q} \to A$ deux morphismes d'anneaux unitaires vérifiant $h \circ f = g \circ f$. Soit alors $p/q \in \mathbb{Q}$. On a $h(p/q) = h(p)h(1/q)$ par définition et de même pour g. On a déjà $h(p) = h(f(p)) = g(f(p)) = g(p)$. Il reste à montrer que $h(1/q) = g(1/q)$ pour tout $q \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Or $1 = g(q/q) = g(q)g(1/q) = g(1/q)g(q)$. Ceci montre que $g(q)$ est inversible dans A, d'inverse $g(1/q)$. Comme $g(q) = h(q)$, on a aussi $g(q)^{-1} = h(q)^{-1}$ ce qui donne la conclusion.

(3) Soit $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'inclusion canonique. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour des raisons de cardinalité, i n'est pas inversible! Montrons que c'est un monomorphisme et un épimorphisme. Par injectivité, on obtient facilement que c'est un monomorphisme. Soit maintenant $h, g : \mathbb{R} \to X$ deux applications continues vérifiant $h \circ i = g \circ i$. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(x)$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim y_n = x$. D'où, par continuité, $h(x) = \lim h(y_n) = \lim g(y_n) = g(x)$.

Exercice 4. *(Catégorie et catégorie opposée)*

(1) *Montrer que la catégorie* **Set** *des ensembles n'est pas équivalente à sa catégorie opposée (indication : si* F *est une telle équivalence vérifier que* $F(\emptyset) = \{pt\}$ *et étudier* $F(\emptyset \times \emptyset)$*).*

(2) *Montrer que la catégorie* **Rel** *des relations (cf. Example 1.3.4.ii du cours) est équivalente à sa catégorie opposée.*

(3) *On va maintenant montrer que la catégorie des groupes abéliens finis est équivalente à sa catégorie opposée. On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un unique groupe du type* $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ *où les entiers strictement positifs* n_i *vérifient* $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$*.*

i) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n,p)\mathbb{Z}$ *; en déduire l'existence d'un isomorphisme de groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *et le décrire explicitement.*

ii) Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

iii) Soient G et H des groupes abéliens finis ; établir l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

iv) Soient G, H et K des groupes abéliens finis ; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, K) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, G)
\end{tikzcd}$$

v) Montrer que la catégorie $\mathbf{Ab^f}$ *des groupe abéliens finis est équivalente à la catégorie opposée* $\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}$.

Solution 4. (1) Raisonons par l'absurde. Supposons qu'il existe une équivalence de catégories $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{op}$. Le point clé est qu'une équivalence de catégories préserve les (co)limites (voir ci-dessous pour une dÃ©monstration). En particulier $F(\emptyset)$ est un objet initial de $\mathbf{Set}^{op}$, donc isomorphe à un objet final de $\mathbf{Set}$, c'est à dire pt. De même $F(\emptyset \times \emptyset) = F(\emptyset) \times F(\emptyset) \in \mathbf{Set}^{op}$. Mais les produits dans $\mathbf{Set}^{op}$ correspondent aux coproduits dans $\mathbf{Set}$. Donc $F(\emptyset \times \emptyset) \cong \mathrm{pt} \coprod \mathrm{pt}$ qui est un ensemble à 2 éléments; en particulier $F(\emptyset \times \emptyset)$ n'est pas isomorphe à $\mathrm{pt} \cong F(\emptyset)$. Or, dans $\mathbf{Set}$, $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ ce qui est une contradiction. Il n'existe donc pas d'équivalences de catégories entre $\mathbf{Set}$ et $\mathbf{Set}^{op}$.

Comme cela ne peut pas faire de mal, voici une démonstration du fait que, si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une catégorie avec produit (fini) et objet initial alors $F(\emptyset)$ est un objet initial et $F(X \times Y) \cong F(X) \times F(Y)$ (en particulier ce dernier existe). Quel que soit $Y \in \mathcal{D}$, par essentielle surjectivité, il existe $Y \xrightarrow{\sim} F(X)$. En particulier, il existe une flèche $F(\emptyset) \to F(X) \to Y$ qui est de plus unique par fidélité de F. Par consÃ©quent : $F(\emptyset)$ est initial. Un raisonement similaire permet de déduire de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(X) \times F(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(X)) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y)$$

le résultat pour les produits finis.

(2) Rappelons que les objets de $\mathbf{Rel}$ sont les ensembles et l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y)$ est $\mathcal{P}(X \times Y)$, l'ensemble des parties de $X \times Y$. Construisons une équivalence (en fait un isomorphisme) $F : \mathbf{Rel} \to \mathbf{Rel}^{op}$. On choisit $F(X) = X$ pour tout ensemble X. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y)$. par définition, f est un sous-ensemble de paires $(x, y) \in X \times Y$. On pose $F(f)$ le sous ensemble de $Y \times X$ des paires (y, x) telles que $(x, y) \in f \subset X \times Y$ (on a juste permuté X et Y en fait). Clairement $F(f)$ est un morphisme de $\mathbf{Rel}^{op}$. Il est immédiat que F est un foncteur. Il est surjectif, donc essentiellement surjectif et de plus, pleinement fidèle. D'où le résultat.

(3) (1) On note $d = \mathrm{pgcd}(n, p)$, $n' = n/d$ et $p' = p/d$ de sorte que $\mathrm{pgcd}(n', p') = 1$. Un morphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est déterminé par $a = f(1)$ (avec $a \in \{0, \dots, p-1\}$) ; de plus on doit avoir $0 = f(0) = f(n) = na$ donc $p | na$ donc $p' | n'a$ donc $p' | a$ car $\mathrm{pgcd}(n', p') = 1$.

Ainsi $a = \alpha p'$ avec $\alpha \in \{0, \ldots, d-1\}$ et réciproquement, deux valeurs distinctes $\alpha p'$, $\beta p'$ déterminent deux morphismes distincts. Il en découle des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim"] & & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim"] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
f \arrow[r, mapsto] & \dfrac{f(1)}{p'} & & \dfrac{g(1)}{n'} & g \arrow[l, mapsto] \\
(\ k \mapsto kp'\alpha\ ) & & \alpha \arrow[ll, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & (\ k \mapsto kn'\alpha\ )
\end{tikzcd}$$

Par composition, on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
f & \longmapsto & g : k \mapsto k\dfrac{n'}{p'}f(1) = k\dfrac{n}{p}f(1)
\end{array}.$$

On peut remarquer que, par définition, p' est bien inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) On calcule l'image de (f, g) par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

D'après (1) on obtient le morphisme $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{n}{q}\big(g \circ f(1)\big)$.
On calcule ensuite l'image de (f, g) par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Le résultat est la composition des deux morphismes $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{p}{q}g(1)$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{n}{p}f(1)$ c'est à dire le morphisme $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\dfrac{p}{q}g(1)\dfrac{n}{p}f(1) = k\dfrac{n}{q}f(1)g(1) = k\dfrac{n}{q}\big(g \circ f(1)\big)$.
Le diagramme donné est donc commutatif.

(3) On utilise les formes canoniques de G et H : $G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et $H \simeq \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$. On a alors, puisque la somme directe commute avec le bifoncteur $Hom(-,-)$ (à droite et à gauche) : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

(4) On utilise les formes canoniques de G, H et K pour se ramener à la situation de la question (2). La fonctorialité de la somme directe et l'unicité des formes canoniques assurent que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, K) \arrow[d, "\wr"] \\
\bigoplus_{i,j,k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z/m_j\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/l_k\mathbb{Z}) \arrow[r] & \bigoplus_{i,k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/l_k\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci ramène au diagramme de la question (2).

(5) On définit $F : \mathbf{Ab^f} \to \left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}$ par $F(G) = G$ et

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(G,H) \to \mathrm{Hom}_{\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}}(F(G),F(H)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(H,G)$$

par l'isomorphisme donné à la question (3). Le résultat de la question (4) signifie que F est un foncteur. De plus F est pleinement fidèle (car F induit un ismorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(G,H)$ dans $\mathrm{Hom}_{\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}}(F(G),F(H))$) et essentiellement surjectif (car surjectif) (définition 2.1.6) donc F est une équivalence de catégories (théorème 2.1.10).

Remarque 2. Un point important dans la question **(3)** est qu'on peut faire commuter les sommes directes avec les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot,\cdot)$. Ceci découle est une conséquence du fait que la somme directe est un produit et un coproduit, cf l'exercice 5 ci-dessous. Bien entendu c'est immédiat à vérifier dans le cadre de l'exercice.

Exercice 5. *Soient $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs.*

(1) *On suppose que G est adjoint à gauche de D. Montrer qu'il existe des morphismes de foncteurs $\varepsilon : Id_{\mathcal{C}} \to DG$ et $\eta : GD \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$ tels que les morphismes composés*

$$D(Y) \overset{\varepsilon(D(Y))}{\longrightarrow} DGD(Y) \overset{D(\eta(Y))}{\longrightarrow} D(Y) \quad et \quad G(X) \overset{G(\varepsilon(X))}{\longrightarrow} GDG(X) \overset{\eta(G(X))}{\longrightarrow} G(X)$$

soient des identités.

(2) *Réciproquement, montrer que s'il existe ε et η vérifiant les propriétés de la question (1) alors G est adjoint à gauche de D.*

(3) *Montrer que G est pleinement fidèle si et seulement si ε est un isomorphisme, et que D est pleinement fidèle si et seulement si η est un isomorphisme.*

Solution 5. **(1)** Par définition d'une adjonction (cf. le cours et le début de ce corrigé) on a une paire d'isomorphismes.

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),Y) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(X{,}Y)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D(Y)) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(X{,}Y)"]\end{tikzcd}$$

En particulier, en prenant $Y = G(X)$, pour tout objet X de C on a un (iso)morphisme :

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(X)) \arrow[r, "\mathrm{Ag}(X{,}G(X))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,DG(X)) \\ \mathrm{Id}_{G(X)} \arrow[r, mapsto] & \varepsilon(X) = \mathrm{Ag}(X,G(X))(\mathrm{Id}_{G(X)})\end{tikzcd}$$

.

et pout tout objet Y de $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y),D(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(D(Y){,}Y)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y),Y) \\ \mathrm{Id}_{D(Y)} \arrow[r, mapsto] & \eta(Y) = \mathrm{Ad}(D(Y),Y)(\mathrm{Id}_{D(Y)})\end{tikzcd}$$

Le point clé, ici, est que l'ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Z)$ n'est pas vide. Il contient toujours le morphisme identité. Notons que les formules données pour ε et η sont les seules possibles (puisqu'on ne sait pas s'il y a d'autres morphismes que l'identité).

Pour montrer que ε et η sont des morphismes de foncteurs $\varepsilon : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to DG$ et $\eta : GD \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, il suffit de vérifier que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y')$ les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}X \arrow[r, "\varepsilon(X)"] \arrow[d, "f"'] & DG(X) \arrow[d, "DG(f)"] \\ X' \arrow[r, "\varepsilon(X')"] & DG(X')\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}GD(Y) \arrow[r, "\eta(Y)"] \arrow[d, "GD(g)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ GD(Y') \arrow[r, "\eta(Y')"] & Y'\end{tikzcd}$$

L'idée est, bien entendu, d'utiliser le fait que Ag et Ad sont des morphismes de bifoncteurs, c'est à dire les carrés haut et bas du diagrame (Adj). L'astuce qui permet de faire ca est que $f = f_*(\mathrm{Id}_X) = f^*(\mathrm{Id}_Y)$ pour tout $f : X \to Y$. En particulier, de la commutativité du diagramme suivant — obtenu en remplaçant $g : Y \to Y'$ par $G(f) : G(X) \to G(X')$ dans le diagramme (Adj) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X)) \arrow[r, "\mathrm{Ag}(X{,}G(X))"] \arrow[d, "G(f)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DG(X)) \arrow[d, "DG(f)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X')) \arrow[r, "\mathrm{Ag}(X{,}G(X'))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DG(X')) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), G(X')) \arrow[r, "\mathrm{Ag}(X'{,}G(X'))"] \arrow[u, "G(f)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', DG(X')) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X') \circ f = \Big(\mathrm{Ag}\big(X', G(X')\big)(\mathrm{Id}_{G(X')})\Big) \circ f = \mathrm{Ag}\big(X, G(X')\big)\big(\mathrm{Id}_{G(X')} \circ G(f)\big) \\
= \mathrm{Ag}\big(X, G(X')\big)\big(G(f) \circ \mathrm{Id}_{G(X)}\big) = GD(f) \circ \Big(\mathrm{Ag}\big(X, G(X)\big)(\mathrm{Id}_{G(X)})\Big) = DG(f) \circ \varepsilon(X)
\end{aligned}$$

et de la commutativité du diagramme suivant — obtenu en remplaçant $f : X \to X'$ par $D(g) : D(Y) \to D(Y')$ dans le diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y)) \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y)) \arrow[l, "\mathrm{Ad}(D(Y){,}Y)"'] \arrow[d, "D(g)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y') & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y')) \arrow[l, "\mathrm{Ad}(D(Y){,}Y')"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y'), Y') \arrow[u, "GD(g)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y'), D(Y')) \arrow[l, "\mathrm{Ad}(D(Y'){,}Y')"'] \arrow[u, "D(g)^*"']
\end{tikzcd}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
g \circ \eta(Y) = g \circ \Big(\mathrm{Ad}\big(D(Y), Y\big)(\mathrm{Id}_{D(Y)})\Big) = \mathrm{Ad}\big(D(Y), Y'\big)\big(D(g) \circ \mathrm{Id}_{D(Y)}\big) = \\
\mathrm{Ad}\big(D(Y), Y'\big)\big(\mathrm{Id}_{D(Y')} \circ D(g)\big) = \Big(\mathrm{Ad}\big(D(Y'), Y'\big)(\mathrm{Id}_{D(Y')})\Big) \circ GD(g) = \eta(Y') \circ GD(g)
\end{aligned}$$

Pour montrer que le morphisme composé $D(Y) \overset{\varepsilon(D(Y))}{\longrightarrow} DGD(Y) \overset{D(\eta(Y))}{\longrightarrow} D(Y)$ est l'identité, on considère le diagramme commutatif suivant, obtenu en remplaçant X par $D(Y)$ et $g : Y \to Y'$ par $\eta(Y) : GD(Y) \to Y$ dans la partie supérieure du diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), GD(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Ag}(D(Y){,}GD(Y))"] \arrow[d, "\eta(Y)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), DGD(Y)) \arrow[d, "D(\eta(Y))_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD(Y), Y) \arrow[r, "\mathrm{Ag}(D(Y){,}Y)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(Y), D(Y))
\end{tikzcd}$$

On remarque que $\eta(Y)$ est construit en appliquant l'inverse de la flèche du bas à $\mathrm{Id}_{D(Y)}$. D'où en partant de $\mathrm{Id}_{GD(Y)}$ en haut à gauche, on obtient :

$$\begin{aligned}
D\big(\eta(Y)\big) \circ \varepsilon\big(D(Y)\big) = D\big(\eta(Y)\big) \circ \Big(\mathrm{Ag}\big(D(Y), GD(Y)\big)(\mathrm{Id}_{GD(Y)})\Big) \\
= \mathrm{Ag}\big(D(Y), Y\big)\big(\eta(Y)\big) = \mathrm{Id}_{D(Y)}
\end{aligned}$$

par construction de $\eta(Y)$.

Pour montrer que le morphisme composé $G(X) \xrightarrow{G(\varepsilon(X))} GDG(X) \xrightarrow{\eta(G(X))} G(X)$ est l'identité, on considère le diagramme commutatif suivant, obtenu en remplaçant Y' par $G(X)$ et $f : X \to X'$ par $\varepsilon(X) : X \to DG(X)$ dans la partie inférieure du diagramme (A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(X)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,DG(X)) \arrow[l, "\mathrm{Ad}(X{,}G(X))"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GDG(X),G(X)) \arrow[u, "\circ G(\varepsilon(X))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X),DG(X)) \arrow[l, "\mathrm{Ad}(DG(X){,}G(X))"'] \arrow[u, "\circ\varepsilon(X)"']
\end{tikzcd}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\eta\big(G(X)\big) \circ G\big(\varepsilon(X)\big) &= \Big(\mathrm{Ad}\big(DG(X),G(X)\big)(\mathrm{Id}_{DG(X)})\Big) \circ G\big(\varepsilon(X)\big) \\
&= \mathrm{Ad}\big(X,G(X)\big)\big(\varepsilon(X)\big) = \mathrm{Id}_{G(X)}
\end{aligned}$$

par construction de $\varepsilon(X)$.

(2) On suppose que G, D, ε et η sont donnés. On a alors, en utilisant le foncteur D, une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),Y) \xrightarrow{D(\cdot)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X),D(Y)) \xrightarrow{\epsilon(X)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D(Y))$$

ce qui définit $\mathrm{Ag}(X,Y)$. Le diagramme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D(Y))) \xrightarrow{G(\cdot)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),GD(Y))) \xrightarrow{\eta(Y)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),Y)$$

donne de même $\mathrm{Ad}(X,Y)$. On a donc défini :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),Y) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(X{,}Y)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D(Y)) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(X{,}Y)"]
\end{tikzcd}$$

par $\mathrm{Ag}(X,Y)(\varphi) = D(\varphi) \circ \varepsilon(X)$ et $\mathrm{Ad}(X,Y)(\psi) = \eta(Y) \circ G(\psi)$. Montrons que ces applications sont inverses l'une de l'autre.

Par la commutativité du diagramme (vérifiée car η est un morphisme de foncteurs) :

$$\begin{tikzcd}
GDG(X) \arrow[r, "\eta(G(X))"] \arrow[d, "GD(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "\varphi"] \\
GD(Y) \arrow[r, "\eta(Y)"] & Y
\end{tikzcd}$$

et la relation $\eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X)) = \mathrm{Id}_{G(X)}$ on a :

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Ad}(X,Y) \circ \mathrm{Ag}(X,Y)\big)(\varphi) = \eta(Y) \circ G\big(D(\varphi) \circ \varepsilon(X)\big) &= \Big(\eta(Y) \circ GD(\varphi)\Big) \circ G(\varepsilon(X)) \\
= \Big(\varphi \circ \eta(G(X))\Big) \circ G(\varepsilon(X)) &= \varphi \circ \Big(\eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X))\Big) = \varphi
\end{aligned}$$

de même par la commutativité du diagramme (vérifiée car ε est un morphisme de foncteurs) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon(X)"] \arrow[d, "\psi"'] & DG(X) \arrow[d, "DG(\psi)"] \\
D(Y) \arrow[r, "\varepsilon(D(Y))"] & DGD(Y)
\end{tikzcd}$$

et la relation $D\big(\eta(Y)\big) \circ \varepsilon\big(D(Y)\big) = \mathrm{Id}_{D(Y)}$, on a :

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Ag}(X,Y) \circ \mathrm{Ad}(X,Y)\big)(\psi) = D\big(\eta(Y) \circ G(\psi)\big) \circ \varepsilon(X) &= D\big(\eta(Y)\big) \circ \Big(DG(\psi) \circ \varepsilon(X)\Big) \\
= D\big(\eta(Y)\big) \circ \Big(\varepsilon(D(Y)) \circ \psi\Big) &= \Big(D\big(\eta(Y)\big) \circ \varepsilon(D(Y))\Big) \circ \psi = \psi
\end{aligned}$$

ce qui montre que Ag et Ad sont inverses l'un de l'autre.

Pour montrer que ce sont des isomorphismes de foncteurs, il reste donc à vérifier, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$, la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(X{,}Y)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y)) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(X{,}Y)"] \arrow[d, "D(g)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y') \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(X{,}Y')"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(Y')) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(X{,}Y')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), Y') \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(X'{,}Y')"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[u, "G(f)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', D(Y')) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(X'{,}Y')"] \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

C'est une des étapes les plus faciles: on a en effet, pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), Y)$:

$$\mathrm{Ag}(X, Y')(g \circ \varphi) = D(g) \circ D(\varphi) \circ \varepsilon(X) = D(g) \circ \mathrm{Ag}(X, Y)(g)$$

et pour $\psi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', D(Y'))$:

$$\mathrm{Ad}(X, Y')(\psi' \circ f) = \eta(Y) \circ G(\psi') \circ G(f) = \mathrm{Ad}(X', Y')(\psi') \circ G(f)$$

(3) On suppose que G est pleinement fidèle , c'est à dire que, pour tout X, X', l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), G(X))$$

est un isomorphisme. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, construisons un inverse de $\epsilon(X)$. L'inverse cherché est dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GDG(X), G(X))$ puisque G est pleinement fidéle. Par composition avec $\mathrm{Ag}(DG(X), G(X))$, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), DG(X)) .$$

Par construction, cet isomorphisme est donné par :

$$f \longmapsto \mathrm{Ag}(DG(X), G(X))(G(f)) = DG(f) \circ \varepsilon(DG(X)) = \varepsilon(X) \circ f$$

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe donc un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DG(X), X)$ tel que $\varepsilon(X) \circ f = \mathrm{Id}_{DG(X)}$. Il nous faut encore vérifier que f est un inverse à droite, c'est à dire que $f \circ \epsilon(X) = \mathrm{Id}_X$. Comme G est fidéle, il suffit de voir que $G(f \circ \epsilon(X)) = \mathrm{Id}_{G(X)}$. Or on a $G(\varepsilon(X)) \circ G(f) = \mathrm{Id}_{GDG(X)}$ donc :

$$G(f) = \Big(\eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X))\Big) \circ G(f) = \eta(G(X)) \circ \Big(G(\varepsilon(X)) \circ G(f)\Big) = \eta(G(X))$$

et donc $G(f \circ \varepsilon(X)) = \eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X)) = \mathrm{Id}_{G(X)}$.

On a donc montré que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\varepsilon(X)$ est inversible, ce qui signifie de ε est un isomorphisme de foncteurs.

Réciproquement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\varepsilon(X)$ est inversible alors pour tout couple d'objets X et X' de $\mathcal{C}$ on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', DG(X))$$

défini par $f \mapsto \varepsilon(X) \circ f$ et par composition avec $\mathrm{Ad}(X', G(X))$ un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X'), G(X))$$

qui n'est autre que G car défini par

$$f \mapsto \mathrm{Ad}(X', G(X))(\varepsilon(X) \circ f) = \eta(G(X)) \circ G(\varepsilon(X)) \circ G(f) = G(f)$$

ce qui montre que G est pleinement fidèle.

On procède de manière similaire pour montrer que D est pleinement fidèle si et seulement si η est un isomorphisme.

Exercice 6 ((co)produits dans **Gp** et **Ab**). *On note* **Gp** *la catégorie des groupes et* **Ab** *sa sous-catégorie des groupes abéliens.*

(1) *Monter que le produit et le coproduit existe dans* **Ab** *et qu'ils sont isomorphes.*

(2) *Montrer que le produit et le coproduit existent dans* **Gp** *et les déterminer explicitement. On vérifiera qu'ils sont non-isomorphes.*

(3) *En déduire que le produit de 2 groupes abéliens est le même si on le prend dans* **Ab** *ou* **Gp** *mais, qu'en revanche, le coproduit de 2 groupes abéliens diffère selon qu'on le prend dans* **Ab** *ou* **Gp**.

Solution 6. **(1)** On va montrer que la somme directe $A \oplus B$ vérifie les propriétes universelles du produit et du coproduit. Ce qui terminera la question. Soit $p_A : A \oplus B \to A$, $p_B : A \oplus B \to B$ les applications $(a,b) \mapsto a$ et $(a,b) \mapsto b$. Ce sont clairement des morphismes de groupes abéliens. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "f_A"] \arrow[drr, "f_B"'] \arrow[r, dotted, "\phi"] & A \oplus B \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Il faut montrer que ϕ, rendant le diagramme commutatif, existe et est unique. Par définition une telle application ϕ est donnée, pour tout $c \in C$, par $\phi(c) = (\alpha(c), \beta(c)) \in A \oplus B$ (c'est déjà vrai pour toute application ensembliste !). Mais alors $\alpha(c) = p_A(\phi(c))$, $\beta(c) = p_B(\phi(c))$. Donc $\phi = (f_A, f_B)$ et Phi est unique si elle existe. Il reste à montrer que cette application $\phi = (f_A, f_B)$ est bien un morphisme de groupes ce qui est aisé. Donc $A \oplus B \cong A \prod B$.

Passons au coproduit. Il y a des morphismes de groupes évidents $i_A : A \to A \oplus B$, $i_B : B \to A \oplus B$ définis par $a \mapsto (a, 0)$ et $b \mapsto (0, b)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
 & A \oplus B \arrow[r, dotted, "\phi"] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il faut montrer que ϕ, rendant le diagramme commutatif, existe et est unique. Or pour tout (a,b) on a $(a,b) = (a,0) + (0,b) = i_A(a) + i_B(b)$. Il en découle que si Φ existe, nécéssairement, on a $\Phi((a,b)) = f_A(a) + f_B(b)$. Cette formule donne bien un morphisme de groupe car

$$f_A(a + a') + f_B(b + b') = f_A(a) + f_A(a') + f_B(b) + f_B(b') = f_A(a) + f_B(b) + f_A(a') + f_B(b')$$

ce qui donne $\phi((a,b) + (a',b')) = \phi((a,b)) + \phi((a',b'))$. Notons que la formule ci-dessous, bien que triviale, n'est valable que parceque C est commutatif (on utilise $f_A(a') + f_B(b) = f_B(b) + f_A(a')$). En particulier si C est un groupe dans lequel $f_A(A)$ et $f_B(B)$ ne commutent pas, alors Φ ne peut pas exister.

(2) D'aprés la fin de la question **(1)** ci-dessus, la somme directe $A \times B$ ne peut pas être le coproduit. C'est cependant bien le produit; par une démonstration analogue à ci-dessus. il convient peut-être de rappeler que $A \times B$ est l'ensemble $A \times B = \{(a,b),\ a \in A, b \in B\}$ muni de la mutliplication $(a,b) * (a',b') = (aa', bb')$. On dit parfois dans la littérature que $A \times B$ est le produit direct (au lieu de somme directe ou juste produit). On va montrer que le coproduit de A et de B est le "produit libre" $A * B$, cf la remarque 3 ci-dessous. On note encore j_A, j_B les morphismes de groupes canoniques $A \to A * B$, $B \to A * B$. Soit maintenant $f_A : A \to C$, $f_B : B_toC$ deux morphismes de groupes. On veut montrer l'existence et l'unicité de ϕ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "j_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
& A * B \arrow[r, dotted, "\phi"] & C \\
B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in A * B$; il s'écrit sous la forme (unique si on impose les conditions (0.2) de la remarque) d'un produit $x = j_A(a_1).j_B(b_1).\dots.j_A(a_n).j_B(b_n)$; d'où

$$\phi(x) = \phi\big(i_A(a_1).i_B(b_1).\dots.i_A(a_n).i_B(b_n)\big) = f_A(a_1).f_B(b_1)\dots f_A(a_n).f_B(b_n)$$

puisque ce doit être un morphisme de groupes. Ceci donne l'unicité. Il est de plus évident que ϕ ainsi défini est un morphisme de groupes, ce qui donne l'existence. Le groupe ainsi obtenu n'est aps isomorphe à $A \times B$ (sinon ce dernier vérifierait la prorpiété universelle d'un coproduit).

(3) D'aprés le (1) le coproduit de deux groupes abéliens est la somme directe si on le prend dans la catégorie des groupes abéliens. En revanche si on le prend dans la catégorie des groupes on trouve $A * B$ qui n'est pas isomorphe à $A \oplus B$ et n'est d'ailleurs pas abélien (sauf si A ou B est trivial)! En revanche, si A et B sont abéliens, il existe une unique application $A * B \to A \oplus B$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "j_A"'] \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
A * B \arrow[r] & A \oplus B \arrow[r, dotted, "\exists!\phi"] & C \\
B \arrow[u, "j_B"] \arrow[ur, "i_B"'] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

où C est un groupe abélien.

Remarque 3. Soit A, B deux groupes. On peut former leur produit libre $A * B$. Le moyen le plus élégant pour définir ce groupe est par le moyen de générateurs et relations. Soit $(S_A, \mathcal{R}_A)$ un système de générateurs et relations de A et $(S_B, \mathcal{R}_B)$ un système de générateurs et relations de B; Alors $A * B$ est le groupe présenté par $\big(S_A \coprod S_B, \mathcal{R}_A \coprod \mathcal{R}_B\big)$, c'est à dire par l'union disjointe des générateurs de A et de B, modulo les relations de A et B. De cette manière l'application $j_A : A \to A*B$ définie comme l'identité sur les générateurs envoieé videmment les relations de A sur 1; donc induit un morphisme de groupes canonique. De même on obtient un morphisme canonique $j_B : B \to A * B$. Evidemment cette présentation nécessite de connaitre le groupes libres sur un ensemble. On peut prouver que le groupe $A * B$ ainsi construit est l'ensemble des symboles $a_1b_1 \dots a_nb_n$ où n est un entier naturel non nul quelconque et

$$a_{i>1} \in A - \{1_A\}, \quad \text{et} \quad b_{i \leq n-1} \in B - \{1_B\}; \quad a_1 \in A, b_n \in B. \tag{0.2}$$

On définit $a_1b_1 * a'_1b'_2$ comme le symbole $a_1b_1a'_1b'_1$ si $b_1 \neq 1_B$ et $a_1 \neq 1_A$. Si $b_1 = 1_B$, on définit $a_1b_1 * a'_1b'_2$ comme le symbole $(a_1a'_1)b_1$ (où on a appliqué le produit dans A dans la parenthèse). De même si $a'_1 = 1_A$, on dféinit $a_1b_1 * a'_1b'_2$ comme le symbole $a_1(b_1b'_1)$. On remarque que si $a'_1 = 1_A$ et$b_1 = 1_B$, les deux écritures défintions donnent bien le même symbole. En itérant cette construction on définit un produit $a_1b_1 \dots a_nb_n * a'_1b'_1 \dots a'_mb'_m$ en multipliant d'abord les termes $a_nb_n, a'_1b'_1$ suivant la règle ci-dessus puis en continuant d'appliquer les règles ci-desus si le symbole obtenu commence par un 1_A ou se termine par un 1_B. En un nombre fini d'étapes on obtient un un symbole uniquement défini vérifiant les conditions (0.2). Plus précisément on a :

$$a_1b_1\dots a_nb_n * a'_1b'_1\dots a'_mb'_m := (\dots(a_1b_1 * \dots(a_{n-1}b_{n-1} * (a_nb_n * a'_1b'_1) * a'_2b'_2)) * \dots a'_mb'_m)\dots).$$

Il n'est pas très dur de vérifier que cette multiplication est associative, que le symbole 1_A1_B est l'unité et que l'inverse de $a_1b_1\dots a_nb_n$ existe et est donné par

$$\begin{aligned}(a_1b_1\dots a_nb_n)^{-1} &= 1_Ab_n^{-1}a_n^{-1}\dots b_1^{-1}a_1^{-1}1_B \text{ si } a_1 \neq 1_A \text{ et } b_n \neq 1_B\\ &= a_n^{-1}\dots b_1^{-1}a_1^{-1}1_B \text{ si } a_1 \neq 1_B \text{ et } b_n = 1_B\\ &= 1_Ab_n^{-1}a_n^{-1}\dots b_1^{-1} \text{ si } a_1 = 1_A \text{ et } b_n \neq 1_B\\ &= a_n^{-1}\dots b_1^{-1} \text{ si } a_1 = 1_A \text{ et } b_n = 1_B.\end{aligned}$$

Le groupe ainsi obtenu est $A*B$. Avec cette écriture, el morphisme canonique j_A est défini par $a \mapsto a1_B$ et j_B par $b \mapsto 1_Ab$.

Le groupe ainsi obtenu est toujours très gros. Par exemple il est toujours infini sauf si un des deux groupes est trivial et le deuxième est fini. On peut remarquer que $\{e\} * B = B = B * \{e\}$. En particulier, $A * B$ est de cardinal toujours infini sauf si l'un des deux groupes est trivial et l'autre fini.

Exercice 7. *On note* **Ring** *la catégorie des anneaux commutatifs unitaires.*

(1) Montrer que $\mathbb{Z}$ est un objet initial dans **Ring** *et que $\{0\}$ est un objet final.*

(2) Montrer que le coproduit $A\coprod B$ existe dans la catégorie **Ring** *et est donné par $A\coprod B = A\otimes_{\mathbb{Z}} B$. Montrer que le produit $A\prod B$ existe dans* **Ring**.

Solution 7. (1) Un morphisme d'anneaux unitaires $f : \mathbb{Z} \to A$ doit vérifier $f(1) = 1_A$ d'où par linéarité, $f(n) = n1_A$. En particulier f existe et est unique; donc $\mathbb{Z}$ est initial. Pour tout anneau il existe un unique morphisme $A \to \{0\}$ qui est bien un morphisme d'anneaux. D'où la conclusion.

(2) Djéà $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ est un groupe abélien bien défini. On le munit d'une structure d'anneau par la formule $a \otimes_{\mathbb{Z}} b * a' \otimes_{\mathbb{Z}} b' = aa' \otimes_{\mathbb{Z}} bb'$. On vérifie que cette formule a du sens et que cela donne bien une structure d'anneau à $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Les propriétés du produit tensoriel donnent des applications linéaires $i_A : A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ défini par $i_A(a) = a \otimes 1_B$ et de même $i_B : B \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ défini par $i_B(b) = 1_A \otimes b$. Il est immédiat que i_A, i_B sont de plus des morphismes d'anneaux. Montrons que pour tout anneau commutatif unitaire C et morphismes d'anneaux $f_A : A \to C$, $f_B : B \to C$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
& A \otimes_{\mathbb{Z}} B \arrow[r, dotted, "\phi"] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

L'astuce est la relation $a \otimes_{\mathbb{Z}} b = (a \otimes_{\mathbb{Z}} 1b) * (1_A \otimes_{\mathbb{Z}} b)$. On en déduit que

$$\phi(a \otimes_{\mathbb{Z}} b) = \phi(a \otimes_{\mathbb{Z}} 1).\phi(1_A \otimes_{\mathbb{Z}} b) = f_A(a)f_B(b).$$

On en déduit l'unicité de ϕ. Il reste à voir que la formule ci dessus définit bien un morphisme d'anneau. Cela découle de la commutativité de C (similairement au coproduit des groupes abéliens dans l'exercice **5.(1)**) car

$$\phi(aa'\otimes_{\mathbb{Z}}bb') = f_A(aa')f_B(bb') = f_A(a)f_A(a')f_B(b)f_B(b') = f_A(a)f_B(b)f_A(a')f_B(b') = \phi(a\otimes_{\mathbb{Z}}b)\phi(a'\otimes_{\mathbb{Z}}b').$$

Pour le produit, on prend le groupe abélien $A\oplus B$ comme groupe abélien sous-jacent au produit de A et B. On le munit d'un produit $(a, b)*(a', b') = (aa', bb')$. Ceci lui donne une structure d'anneau dont le neutre est $(1, 1)$. Les projections $p_A : A \oplus B \to A$, et $p_B : A \oplus B \to B$ sont des morphismes d'anneaux. Enfin tout morphisme de $\phi : C \to A \oplus B$ s'écrit $\phi(c) = (p_A(\phi(c)), p_B(\phi(c)))$. on en déduit comme dans l'exercice **5** que $A \oplus B$ est bien le produit de A et B dans la catégorie des anneaux.

Remarque 4. Nous n'avons pas supposé que l'unité est distincte de 1 dans la définition d'un anneau unitaire. C'est à dire qu'on a autorisé $\{0\}$ comme anneau unitaire. Remarquons aussi que ce qui "empèche" la somme directe $A \oplus B$ d'étre un coproduit est que l'application ensembliste $A \to A \oplus B$, $A \mapsto (a, 1)$ n'est pas linéaire. C'est exactement cet ennui qui disparait quand on passe au produit tensoriel...