CHAPITRE 1

CATÉGORIES ET FONCTEURS

1.1. Univers

La notion d'univers a été introduite par Grothendieck pour éviter les classes propres en géométrie algébrique.

1.1.1. On appelle *univers de Grothendieck* toute collection d'ensembles $\mathfrak{U}$ qui vérifie les conditions suivantes :

(a) $\varnothing \in \mathfrak{U}$;

(b) si $x \in \mathfrak{U}$ et si $y \in x$, alors $y \in \mathfrak{U}$;

(c) si x et y sont deux éléments de $\mathfrak{U}$, alors $\{x, y\} \in \mathfrak{U}$;

(d) si $x \in \mathfrak{U}$, alors l'enseble des parties $\mathcal{P}(x)$ appartient à $\mathfrak{U}$;

(e) si I est un ensemble qui appartient à $\mathfrak{U}$ et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles dans $\mathfrak{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} x_i \in \mathfrak{U}$.

1.1.2. Dans la théorie des ensembles à la Zermelo–Fraenkel avec l'axiome du choix (ZFC), l'énoncé

(U) *tout ensemble appartient à un univers de Grothendieck*

est indécidable. Il est en outre équivalent à l'existence des cardinaux inaccessibles (un cardinal est dit *inaccessible* s'il ne peut pas être construit dans la théorie ZFC à partir de cardinaux plus petits). Dans ce texte, on travaille avec les axiomes de ZFC plus l'axiome (U). Dans la théorie ZFC+(U), on peut montrer que tout univers fournit un modèle pour la théorie ZFC.

1.2. Catégories

1.2.1. Soit $\mathfrak{U}$ un univers. On appelle $\mathfrak{U}$-*catégorie* (ou simplement *catégorie* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'univers $\mathfrak{U}$) toute donnée qui consisite

(i) d'un ensemble $\mathcal{C}$ (dont les éléments sont appelés *objets* de $\mathcal{C}$),

(ii) pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'un ensemble $\mathcal{C}(X, Y) \in \mathfrak{U}$ (on utilisera aussi l'expression $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour désigner cet ensemble) dont les éléments sont appelés *morphismes* de X dans Y (on utilise l'expression $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ pour désigner l'énoncé «f *appartient à* $\mathcal{C}(X, Y)$»),

(iii) pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application (applée *application de composition*)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & gf, \end{array}$$

qui vérifient les axiomes suivants :

(a) pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un élément $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ (appelé *morphisme d'identité* de X) tel que, pour tout morphisme $f : Y \to X$ on ait $1_X f = f$, et pour tout morphisme $g : X \to Y$ on ait $g1_X = g$;

(b) si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}$, alors on a $h(gf) = (hg)f$.

S'il n'y a pas d'ambiguité sur les morphismes, on utilise l'expression désignant l'ensemble d'objet pour représenter toute la donnée de la catégorie. Si $\mathcal{C}$ appartient à $\mathfrak{U}$, on dit que la $\mathfrak{U}$-catégorie $\mathcal{C}$ est *petite*.

1.2.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, on dit que X est la *source* de f et que Y est le *but* de f.

1.2.3. Soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ deux univers tels que $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$. Si $\mathcal{C}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie telle que $\mathcal{C} \in \mathfrak{V}$ mais $\mathcal{C} \notin \mathfrak{U}$, alors elle est une $\mathfrak{V}$-catégorie petite mais pas une $\mathfrak{U}$-catégorie petit. En d'autres termes, la petitesse d'une catégorie dépend du univers dans lequel on travaille.

1.2.4. On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est *finie* si la réunion disjointe des $\mathcal{C}(X, Y)$ où $(X, Y) \in \mathcal{C}^2$ est un ensemble fini. Cela revient à dire que l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$ est fini et que, pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, l'ensemble de morphismes $\mathcal{C}(X, Y)$ est fini.

1.2.5. Convention. — Dans le reste du livre, on fixe un univers $\mathfrak{U}$ qui est un ensemble infini. Sauf mention au contraire, toute catégorie est supposée être une $\mathfrak{U}$-catégorie, et tout ensemble, sauf s'il s'agit de l'ensemble des objets d'une catégorie, est supposé appartenir à $\mathfrak{U}$.

1.2.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le morphisme d'identité 1_X de X est unique. En effet, si $1'_X$ est aussi un morphisme d'identité de X, par définition on a $1'_X = 1'_X 1_X = 1_X$.

1.2.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $f^{-1} : Y \to X$ tel que $f^{-1}f = 1_X$ et $ff^{-1} = 1_Y$. Ce morphisme est appelé *inverse* de f. Si l'inverse de f existe, alors il est nécessairement unique. En effet, si $g : Y \to X$ est un inverse de f, alors on a

$$g = g1_Y = gff^{-1} = 1_X f^{-1} = f^{-1}.$$

En particulier, on a $(f^{-1})^{-1} = f$. Autrement dit, f est l'inverse de son inverse.

Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. S'il existe un isomorphisme dans l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$, on dit que X est *isomorphe* à Y et on utilise l'expression $X \cong Y$ pour désigner cette relation. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des objets $\mathcal{C}$.

1.2.8. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Si $\alpha : X \to Z$ et $\beta : Z \to Y$ sont deux morphismes dans $\mathcal{C}$ tels que $f = \beta\alpha$, on dit que le morphisme f *se factorise* par α, ou par β, ou encore par l'objet Z.

1.2.9. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme. Si, pour tout objet X' et tout couple de morphismes $\alpha, \beta : X' \to X$, la relation $f\alpha = f\beta$ entraîne $\alpha = \beta$, on dit que f est un *monomorphisme*. Si, pour tout objet Y' et tout couple de morphismes $a, b : Y \to Y'$, la relation $af = bf$ entraîne $a = b$, on dit que f est un *épimorphisme*. On utilisera les flèches $\rightarrowtail$ et $\twoheadrightarrow$ pour désigner un monomorphisme et un épimorphisme respectivement.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Il est un monomorphisme si et seulement si, pour tout objet Z de $\mathcal{C}$, l'application $\mathcal{C}(Z, X) \to \mathcal{C}(Z, Y)$ qui envoie $\alpha \in \mathcal{C}(Z, X)$ sur $f\alpha$ est injective. Il est un épimorphisme si et seulement si, pour tout objet Z de $\mathcal{C}$, l'application $\mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$ qui envoie $a \in \mathcal{C}(Y, Z)$ sur af est injective.

1.2.10. Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ des morphismes dans $\mathcal{C}$.*

(1) Si vu est un monomorphisme, alors u est aussi un monomorphisme.

(2) Si vu est un épimorphisme, alors v est aussi un épimorphisme.

Démonstration. — (1) Soient $\beta_1, \beta_2 : E \to A$ des morphismes tels que $u\beta_1 = u\beta_2$. On a $vu\beta_1 = vu\beta_2$ et donc $\beta_1 = \beta_2$ puisque vu est un monomorphisme. Par conséquent, u est un monomorphisme.

(2) Soient $\gamma_1, \gamma_2 : C \to D$ des morphismes tels que $\gamma_1 v = \gamma_2 v$. On a $\gamma_1 vu = \gamma_2 vu$ et donc $\gamma_1 = \gamma_2$ puisque vu est un épimorphisme. Par conséquent, v est un épimorphisme. □

1.2.11. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Si f est un isomorphisme (cf. §1.2.7), alors il est nécessairement un monomorphisme et un épimorphisme. En effet, pour tout objet Z de $\mathcal{C}$, l'application $\mathcal{C}(Z, X) \to \mathcal{C}(Z, Y)$ qui envoie tout $\alpha \in \mathcal{C}(Z, X)$ sur $f\alpha$ admet une application inverse, qui envoie tout $\beta \in \mathcal{C}(Z, Y)$

sur $f^{-1}\beta$. Donc cette application est une bijection et est en particulier injective. Similairement, l'application $\mathcal{C}(Y,Z) \to (X,Z)$ qui envoie tout $a \in \mathcal{C}(Y,Z)$ sur af admet aussi une application inverse, qui envoie tout $b \in \mathcal{C}(Z,Y)$ sur bf^{-1}. Elle est ainsi une bijection et est en particulier injective.

La réciproque de l'énoncé précédent n'est pas vrai. On peut considérer l'application d'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, vue comme un morphisme de la catégorie des anneaux. Ce morphisme est un monomorphisme car l'application d'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est injective et les morphismes de la catégorie des anneaux sont des applications d'ensembles. Le morphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est aussi un épimorphisme. En effet, si R est un anneau et si f et g sont deux homomorphismes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ dont les restrictions à $\mathbb{Z}$ coïncident, alors on a $f = g$ puisque tout nombre rationnel s'écrit comme le quotient de deux entiers. Cependant, le morphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ n'est pas un isomorphisme.

1.3. Constructions et exemples

1.3.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On désigne par $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ la catégorie dont l'ensemble d'objets s'identifie à celui de $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}(X,Y)$ s'identifie à $\mathcal{C}(Y,X)$ pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$ et que les applications de composition de $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ proviennent de celles de $\mathcal{C}$, qui sont de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathrm{o}}(Z,Y) \times \mathcal{C}^{\mathrm{o}}(Y,X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\mathrm{o}}(Z,X) \\ (g,f) & \longmapsto & gf, \end{array}$$

La catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ est appelée l'*opposée* de $\mathcal{C}$.

On voit aussitôt de la définition qu'un morphisme f dans $\mathcal{C}$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme) (cf. §1.2.9) si et seulement si, vu comme un morphisme dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$, f est un épimorphisme (resp. monomorphisme).

1.3.2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. On dit que $\mathcal{C}'$ est une *sous-catégorie* de $\mathcal{C}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $\mathcal{C}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}$,

(b) pour tout couple (X,Y) d'objets de $\mathcal{C}'$, l'ensemble $\mathcal{C}'(X,Y)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(X,Y)$,

(c) pour tout objet X de $\mathcal{C}'$, le morphisme d'identité de X dans $\mathcal{C}'$ coincide avec celui dans $\mathcal{C}$,

(d) les applications de composition de $\mathcal{C}'$ proviennent de celles de $\mathcal{C}$ par restriction.

Si de plus $\mathcal{C}'(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ pour tout couple (X,Y) d'objets de $\mathcal{C}'$, on dit que $\mathcal{C}'$ est une *sous-catégorie pleine* de $\mathcal{C}$.

1.3.3. Soient I un ensemble et $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ une famille de catégories. On construit une nouvelle catégorie $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ comme suit. Les objets de $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ sont de la forme $(X_i)_{i\in I}$, où X_i est un objet de $\mathcal{C}_i$. Si $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ sont deux objets de $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$, on a

$$\Big(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i\Big)\big((X_i)_{i\in I},(Y_i)_{i\in I}\big) := \prod_{i\in I}\mathcal{C}_i(X_i,Y_i).$$

Enfin, si $(u_i)_{i\in I} : (X_i)_{i\in I} \to (Y_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I} : (Y_i)_{i\in I} \to (Z_i)_{i\in I}$ sont des morphismes de $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$, on a

$$(v_i)_{i\in I}(u_i)_{i\in I} := (v_iu_i)_{i\in I}.$$

1.3.4. Les ensembles dans l'univers $\mathfrak{U}$ et les applications d'ensembles forment une catégorie (cf. la convention 1.2.5) que l'on note $\mathfrak{U}$-**Ens**, ou simplement **Ens**.

1.3.5. On appelle *structure algébrique admissible* toute théorie du premier ordre $\mathscr{L}$ égalitaire qui consiste

(1) d'un ensemble $\mathscr{V}(\mathscr{L})$ de symboles de variables et d'un seul symbol de relation égalitaire $=$;

(2) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'un ensemble $\mathscr{F}_n(\mathscr{L})$ de symbols de fonction n-aires ;

(3) d'un ensemble (éventuellement infini) d'axiomes $\mathscr{E}(\mathscr{L})$ de la forme $\varphi = \psi$, où φ et ψ sont des éléments du plus petit ensemble $\mathscr{T}(\mathscr{L})$ de mots d'alphabet $\mathscr{V} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ qui contient $\mathscr{V}$ et est stable par toute opération de la forme

$$(m_1,\ldots,m_n) \in \mathscr{T}(\mathscr{L}) \longmapsto fm_1\ldots m_n.$$

Par exemple, la structure de groupe commutatif est une structure algébrique admissible. On rappelle que cette théorie à premier ordre contient un symbol binaire d'addition $+$, un symbole unaire d'inversion $-$ et un symbole zéro-aire 0. Les axiomes sont

(a) commutativité : $+xy{=}{+}yx$,

(b) associativité : $+x{+}yz ={+}{+}xyz$,

(c) élément neutre : $+x0 = x$,

(d) élément inverse : $+x{-}x = 0$,

où x, y et z sont des symboles de variables. On peut rendre ces formules plus compréhensible en mettant le symbol d'addition au milieu de ses arguments :

$$x+y=y+x,\quad x+(y+z)=(x+y)+z,\quad x+0=x,\quad x+(-x)=0.$$

De façon similaire, les structures de semi-groupe, monoïde, groupe, anneau, module sont des structures algébriques admissibles. Par contre, la structure de corps n'est pas une structure algébrique admissible. En effet, l'inversion par rapport à la loi de multiplication n'est pas partout définie. Son système d'axiomes doit contenir des formules plus compliquées que les formules égalitaires.

Étant donnée une structure algébrique admissible, ou plus généralement une théorie du premier ordre $\mathscr{L}$, la collection des modèles de $\mathscr{L}$ (dont les ensembles sous-jacents appartiennent à $\mathfrak{U}$), ainsi que les applications entre eux respectant les réalisations des symboles de fonctions, forment une catégorie. On désigne par **Ab**, **An** les catégories des groupes abéliens et des anneaux commutatifs unifères respectivement. Si k est un anneau commutatif unifère, on désigne par k-**Mod** la catégorie des k-modules et par $\mathbf{An}_k$ la catégorie des k-algèbres commutatives.

1.3.6. Exemple. — Soit I un ensemble ordonné. Pour tout couple d'élément (i, j) de I, soit $I(i, j)$ l'ensemble à un élément $\phi_{i,j}$ si $i \leqslant j$ et l'ensemble vide si $i \nleqslant j$. Si i, j et k sont trois éléments de I tels que $i \leqslant j \leqslant k$, on convient que la composée $\phi_{j,k}\phi_{i,j}$ soit égale à $\phi_{i,k}$. Ainsi on obtient une catégorie, appelée *catégorie associée à l'ensemble ordonné* I.

1.3.7. Exemple. — Soit M un espace topologique. On désigne par $\mathcal{T}_M$ l'ensemble des parties ouvertes de M. Cet ensemble est ordonné par la relation d'inclusion. Par abus de notation, on désigne encore par $\mathcal{T}_M$ sa catégorie associée.

1.3.8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle *diagramme de morphismes de* $\mathcal{C}$ tout graphe orienté dont les sommets sont des occurrences d'objets de $\mathcal{C}$ et toute flèche est marquée par un morphisme de sa source dans son but. Si X et Y sont deux sommets du diagramme, à tout chemin du graphe reliant X et Y on peut associer un morphisme de X dans Y formé par la composition des morphismes successifs dans le chemin. Si, pour tout couple (X, Y) de sommets du graphe, les morphismes de X dans Y associés aux chemin reliant X et Y sont identiques, alors on dit que le diagramme est *commutatif.*

Soit Γ un diagramme de morphismes de $\mathcal{C}$. En inversant les flèches de Γ et gardant les sommets et marques on obtient un diagramme de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ (cf. §1.3.1), noté Γ^{o} et appelé *opposée* de Γ. Le diagramme Γ est commutatif si et seulement si son diagramme opposé est commutatif.

1.4. Foncteurs

1.4.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On appelle *foncteur* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ toute donnée qui consiste

(i) d'une application $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,

(ii) pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application

$$F : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y)),$$

soumise aux axiomes suivants :

(a) pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a $F(1_X) = 1_{F(X)}$;

(b) pour tous morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathcal{C}$, on a $F(gf) = F(g)F(f)$.

On utilise l'expression $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pour désigner l'énoncé

«*F est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$*»,

et on désigne par $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ l'ensemble des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. En général, $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ n'appartient pas à $\mathfrak{U}$, mais appartient à un univers plus grand.

1.4.2. Notation. — Soient I et $\mathcal{C}$ deux catégories, et $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur. Alors $(F(i))_{i \in I}$ définit une famille d'objets de $\mathcal{C}$ paramétrées par les objets de I. Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur la correspondance des morphismes par le foncteur F, on utilise l'expression de cette famille d'objets de $\mathcal{C}$ pour représenter toute la donnée du foncteur F. Il faut cependant être conscient que, pour tout morphisme $f : i \to j$ dans la catégorie I on se dispose aussi d'un morphisme de $F(i)$ dans $F(j)$ donné par la structure de foncteur F.

1.4.3. Soient $\mathscr{L}$ une théorie du premier ordre et $\mathcal{C}$ la catégorie des modèles de $\mathscr{L}$. Le foncteur naturel de $\mathcal{C}$ dans **Ens** qui envoie tout objet de $\mathcal{C}$ sur son ensemble sous-jacent est appelé *foncteur d'oubli*. Similairement, si $\mathscr{L}'$ est une théorie du premier ordre obtenue de $\mathscr{L}$ en enlevant une partie de symboles de fonction et une partie d'axiomes, et si $\mathcal{C}'$ est la catégorie des modèles de $\mathscr{L}'$, alors le foncteur naturel de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est aussi appelé *foncteur d'oubli*.

1.4.4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$. On définit un foncteur h_X de $\mathcal{C}$ dans **Ens** comme suit. Pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, soit $h_X(Y) = \mathcal{C}(X, Y)$. Si $f : Y \to Z$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, soit $h_X(f) : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z)$ l'application qui envoie tout $u \in \mathcal{C}(X, Y)$ sur $fu \in \mathcal{C}(X, Z)$. D'après l'axiome (b) de la définition 1.2.1, on obtient que h_X est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans **Ens**.

1.4.5. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ trois catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ deux foncteurs. On désigne par GF le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ qui envoie tout objet X de $\mathcal{C}$ en $G(F(X))$ et tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ en $G(F(f)) : G(F(X)) \to G(F(Y))$. Ce foncteur est appelé *composée* de F et G.

1.4.6. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégorie, et F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. On appelle *transformation naturelle* (ou *morhisme de foncteurs*) de F dans G toute famille $\varphi = (\varphi_X : F(X) \to G(X))_{X \in \mathcal{C}}$ de morphismes de $\mathcal{D}$ paramétrée par les objets de $\mathcal{C}$ telle que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif (cf. 1.3.8). On désigne par $\mathrm{Nat}(F, G)$ l'ensemble des transformations naturelles de F dans G.

Si F est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, alors la collection $1_F = (1_{F(X)})_{X\in\mathcal{C}}$ est une transformation naturelle de F dans F. En outre, si F, G et H sont trois foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, et $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ sont des transformations naturelles, alors $\psi\varphi := (\psi_X\varphi_X)_{X\in\mathcal{C}}$ est une transformation naturelle de F dans H. Pour tous foncteurs F et G de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, $\mathrm{Nat}(F,G)$ est un sous-ensemble de $\prod_{X\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(F(X),G(X))$. On obtient donc que, si $\mathcal{C}$ est une catégorie petite, alors les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ et les transformations naturelles forment une catégorie que l'on note $\mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathcal{D})$.

1.4.7. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, et F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. On dit qu'une transformation naturelle $\varphi = (\varphi_X)_{X\in\mathcal{C}}$ de F dans G est un *isomorphisme naturel* si chaque morphisme φ_X est un isomorphisme. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une catégorie petite, cela revient à dire que φ est un isomorphisme dans la catégorie des foncteurs $\mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathcal{D})$. S'il existe un isomorphisme naturel de F dans G, on dit que les foncteurs F et G sont *isomorphes*.

1.5. Foncteurs représentables

1.5.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On dit que F est *représentable* s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe à h_X (cf. §1.4.4). On dit aussi que le foncteur F est *représenté* par l'objet X.

Si $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur représentable et si $X \in \mathcal{C}$ est un objet qui représente F, alors l'isomorphisme naturel $F \to h_X$ définit une bijection entre $F(X)$ et $h_X(X) = \mathcal{C}(X,X)$. L'élément de $F(X)$ qui correspond à $1_X \in \mathcal{C}(X,X)$ par cette bijection est appelé *élément universel* du foncteur représentable F.

1.5.2. Exemple. — Soit $\mathbf{An}$ la catégorie des anneaux commutatifs et unifères. Le foncteur $\mathbb{A}^n : \mathbf{An} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie $R \in \mathbf{An}$ sur l'ensemble R^n est représenté par l'anneau $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]$. De façon similaire, pour tout anneau k dans $\mathbf{An}$, le foncteur $\mathbb{A}^n_k : \mathbf{An}_k \to \mathbf{Ens}$ est représenté par $k[T_1,\dots,T_n]$, où $\mathbf{An}_k$ désigne la catégorie des k-algèbres commutatives.n L'élément universel du foncteur représentable $\mathbb{A}^n_k$ est le vecteur $(T_1,\dots,T_n)$ dans $k[T_1,\dots,T_n]^n$.

1.5.3. Exemple. — Soient k un anneau et M et N deux k-module. Soit k-$\mathbf{Mod}$ la catégorie des k-modules. On considère le foncteur $F : k\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie tout k-module H en l'ensemble des applications k-bilinéaires de $M \times N$ dans H. Ce foncteur est représenté par le module libre $k^{\oplus(M\times N)}$ modulo le sous-module engenré par les éléments de la forme

$$(ax_1 + bx_2, y) - a(x_1,y) - b(x_2,y) \quad \text{ou} (x, ay_1 + by_2) - a(x,y_1) - b(x,y_2),$$

où $a,b \in k$, $x,x_1,x_2 \in M$ et $y,y_1,y_2 \in N$. On désigne par $M \otimes_k N$ ce k-module. L'image canonique de $(x,y) \in M\times N$ dans $M\otimes_k N$ est noté $x\otimes y$. L'élément universel de ce foncteur est l'application k-bilinéaire de $M \times N$ dans $M \otimes N$ qui envoie (x, y) sur $x \otimes y$.

1.5.4. Théorème (Lemme de Yoneda). — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to$ **Ens** un foncteur. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, alors l'application de $\mathrm{Nat}(h_X, F)$ dans $F(X)$, qui envoie $\varphi \in \mathrm{Nat}(h_X, F)$ sur l'image de $1_X \in h_X(X)$ dans $F(X)$ par φ_X, est une bijection.*

Démonstration. — On construit l'inverse de l'application $\mathrm{Nat}(h_X, F) \to F(X)$ décrite dans le théorème. Pour tout $x \in F(X)$, soit $\alpha(x) = (\alpha(x)_Y)_{Y \in \mathcal{C}}$ la famille d'applications d'ensembles, où $\alpha(x)_Y : h_X(Y) \to F(Y)$ envoie $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sur $F(f)(x)$. Cette famille est une transformation naturelle de h_X dans F car, pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}$ et tout $f \in h_X(A)$, on a

$$\begin{aligned} F(u)(\alpha(x)_A(f)) &= F(u)(F(f)(x)) = F(uf)(x) \\ &= \alpha(x)_B(uf) = \alpha(x)_B(h_X(u)(f)). \end{aligned}$$

On vérifie que α est l'inverse de l'application $\varphi \mapsto \varphi_X(1_X)$. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, on a

$$\alpha(\varphi_X(1_X))_Y(f) = F(f)(\varphi_X(1_X)) = \varphi_Y(h_X(f)(1_X)) = \varphi_Y(f).$$

Réciproquement, pour tout $x \in F(X)$,

$$\alpha(x)_X(1_X) = F(1_X)(x) = 1_{F(X)}(x) = x.$$

Le résultat est donc démontré. □

1.5.5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Si, pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application $F : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ est injective (resp. surjective), on dit que le foncteur F est *fidèle* (resp. *plein*). Si le foncteur F est fidèle à la fois plein, on dit qu'il est *pleinement fidèle*.

1.5.6. Corollaire. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. Le foncteur $\mathbf{y}$ de $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ dans $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$, appelé* foncteur de Yoneda*, qui envoie tout objet X de $\mathcal{C}$ sur le foncteur $h_X : \mathcal{C} \to$ **Ens**, est pleinement fidèle. En particulier, un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathbf{y}(f) : h_Y \to h_X$ est un isomorphisme de foncteurs.*

Démonstration. — Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, le lemme de Yoneda établit une bijection fonctorielle entre $\mathrm{Nat}(h_X, h_Y)$ et $h_Y(X) = \mathcal{C}(Y, X)$ qui envoie 1_{h_X} sur 1_X lorsque $Y = X$. Donc le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Comme le foncteur $\mathbf{y}$ est pleinement fidèle, si f est inversible, alors $\mathbf{y}(ff^{-1}) = \mathbf{y}(f^{-1})\mathbf{y}(f) = 1_{h_Y}$, et $\mathbf{y}(f^{-1}f) = \mathbf{y}(f)\mathbf{y}(f^{-1}) = 1_{h_X}$. D'où $\mathbf{y}(f)$ est un isomorphisme dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$. Réciproquement, si $\mathbf{y}(f)$ est un isomorphisme de foncteurs et si ψ est son inverse, correspondant à un morphisme $g : Y \to X$ par le lemme de Yoneda (i.e. on a $\mathbf{y}(g) =$

ψ). On a alors $\mathbf{y}(fg) = \mathbf{y}(g)\mathbf{y}(f) = \psi\mathbf{y}(f) = 1_{h_Y}$ et $\mathbf{y}(gf) = \mathbf{y}(f)\mathbf{y}(g) = 1_{h_X}$. D'où $fg = 1_Y$ et $gf = 1_X$, qui montre que f est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$. □

1.5.7. Corollaire. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to$ **Ens** un foncteur représentable. Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$ qui représentent le foncteur F, alors il existe un unique isomorphisme $\varphi : X \to Y$ tel que $F(\varphi)$ envoie l'élément universel (cf. §1.5.1) de $F(X)$ sur celui de $F(Y)$.*

Démonstration. — Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$ qui représentent le foncteur F. Il existe un unique isomorphisme de foncteurs $\gamma : h_Y \to h_X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} h_Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & h_X \arrow[d, "\alpha"] \\ & F \end{tikzcd}$$

où $\alpha : h_X \to F$ et $\beta : h_Y \to F$ sont des isomorphismes de foncteurs représentant le foncteur F. Par définition, $x := \alpha_X(1_X)$ et $y := \beta_Y(1_Y)$ sont respectivement les éléments universels dans $F(X)$ et dans $F(Y)$.

Soit $\varphi : X \to Y$ le morphisme qui correspond à $\gamma : h_Y \to h_X$ par le lemme de Yoneda. Par définition on a $\varphi = \gamma_Y(1_Y)$. D'après le corollaire 1.5.6, le morphisme φ est un isomorphisme. Montrons que $F(\varphi)$ envoie x sur y. On a

$$F(\varphi)(x) = F(\varphi)(\alpha_X(1_X)) = \alpha_Y(h_X(\varphi)(1_X)) = \alpha_Y(\varphi) = \alpha_Y(\gamma_Y(1_Y)) = \beta_Y(1_Y) = y,$$

où la deuxième égalité provient du fait que $\alpha : h_X \to F$ est un morphisme de foncteurs.

Supposons que $\psi : X \to Y$ est un autre isomorphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $F(\psi)(x) = y$. Encore par le fait que $\alpha : h_X \to F$ est un morphisme de foncteurs on obtient

$$\beta_Y(1_Y) = y = F(\psi)(x) = F(\psi)(\alpha_X(1_X)) = \alpha_Y(h_X(\psi)(1_X)) = \alpha_Y(\psi),$$

d'où $\psi = \alpha_Y^{-1}(\beta_Y(1_Y)) = \gamma_Y(1_Y)$. L'unicité est donc démontrée. □

1.5.8. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite, $F : \mathcal{C} \to$ **Ens** un foncteur représentable, X un objet de $\mathcal{C}$ qui représente le foncteur F et $\xi \in F(X)$ l'élément universel (cf. §1.5.1). Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, qui correspond à un morphisme de foncteurs $h_f : h_Y \to h_X$ par le lemme de Yoneda, alors la composée de f avec l'isomorphisme $h_X \to F$ représentant le foncteur F donne un morphisme de foncteurs de h_Y dans F, qui correspond à un élément de $F(Y)$ par le lemme de Yoneda. Cet élément n'est rien d'autre que l'image de ξ dans $F(Y)$ par l'application $F(f)$.

1.6. Limites

Les limites sont des constructions importantes dans la théorie des catégories. Elles vérifient des propriétés universelles.

1.6.1. Soient I une catégorie petite et $\mathcal{C}$ une catégorie. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, on désigne par Δ_X le foncteur de I dans $\mathcal{C}$ qui envoie tout objet de I sur X et envoie tout morphisme de I sur 1_X. Le foncteur Δ_X est appelé *foncteur diagonal* de X. La correspondance $X \mapsto \Delta_X$ définit en fait un foncteur de I dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$.

1.6.2. Soient I une catégorie petite, $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur.

(a) Si le foncteur de $\mathcal{C}^o$ dans **Ens** qui envoie tout objet $X \in \mathcal{C}^o$ sur $\mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$ est représentable, on dit que F admet une *limite projective*, et on désigne par $\varprojlim F$ tout objet de $\mathcal{C}^o$ qui représente ce foncteur. Si la limite projective de F existe, on a une bijection fonctorielle en X

$$\mathrm{Nat}(\Delta_X, F) \cong \mathcal{C}^o(\varprojlim F, X) = \mathcal{C}(X, \varprojlim F);$$

de plus, l'élément universel du foncteur représentable $(X \in \mathcal{C}^o) \mapsto \mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$ est un morphisme de foncteurs $\Delta_{\varprojlim F} \to F$, qui peut être écrit sous forme d'une famille $(p_i : \varprojlim F \to F(i))_{i \in I}$ de morphismes dans la catégorie $\mathcal{C}$ tel que $F(f)p_i = p_j$ pour tout morphisme $f : i \to j$ dans la catégorie I.

(b) Si le foncteur de $\mathcal{C}$ dans **Ens** qui envoie tout objet $X \in \mathcal{C}$ sur $\mathrm{Nat}(F, \Delta_X)$ est représentable, on dit que F admet une *limite inductive*, et on désigne par $\varinjlim F$ tout objet de $\mathcal{C}$ qui représente ce foncteur. Si la limte inductive de F existe, alors on a une bijection fonctorielle en X

$$\mathrm{Nat}(F, \Delta_X) \cong \mathcal{C}(\varinjlim F, X);$$

de plus, l'élément universel du foncteur représentable $(X \in \mathcal{C}) \mapsto \mathrm{Nat}(F, \Delta_X)$ est un morphisme de foncteurs $F \to \Delta_{\varinjlim F}$, qui peut être écrit sous forme d'une famille $(q_i : F(i) \to \varinjlim F)_{i \in I}$ de morphismes dans la catégorie $\mathcal{C}$ telle que $q_j F(f) = q_i$ pour tout morphisme $f : i \to j$ dans la catégorie I.

On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ est *complète* (resp. *cocomplète*) si tout foncteur d'une catégorie petite dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective (resp. limite inductive).

1.6.3. On peut interpréter la limite projective comme une propriété universelle. En effet, toute transformation naturelle $\varphi \in \mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$ correspond à une famille de morphismes $(\varphi_i : X \to F(i))_{i \in I}$ telle que, pour tout morphisme $f : i \to j$ dans I, on ait $F(f)\varphi_i = \varphi_j$. Le foncteur F admet une limite projective si et seulement s'il existe un objet $\varprojlim F$ de $\mathcal{C}$ et une (unique) famille de morphismes $(p_i : \varprojlim F \to F(i))_{i \in I}$ (appelés *morphismes universels*), qui satisfont aux conditions suivantes :

(a) pour tout morphisme $f : i \to j$ dans I, on a $F(f)p_i = p_j$;

(b) si $(u_i : X \to F(i))_{i \in I}$ est une famille de morphismes dans $\mathcal{C}$ telle que, pour tout morphisme $f : i \to j$ de I on ait $F(f)u_i = u_j$, alors il existe un unique morphisme $u : X \to \varprojlim F$ tel que $p_i u = u_i$ quel que soit $i \in I$.

De façon similaire, on a aussi une interprétation de la limite inductive par propriété universelle. Le foncteur F admet une limite inductive si et seulement s'il existe un objet $\varinjlim F$ de $\mathcal{C}$ et une (unique) famille de morphismes $(q_i : F(i) \to \varinjlim F)_{i\in I}$ qui satisfont aux conditions suivantes :

(a) pour tout morphisme $f : i \to j$ dans I, on a $q_j F(f) = q_i$;

(b) si $(v_i : F(i) \to X)_{i\in I}$ est une famille de morphismes dans $\mathcal{C}$ telle que, pour tout morphisme $f : i \to j$ dans I on ait $v_j F(f) = v_i$, alors il existe un unique morphisme $v : \varinjlim F \to X$ tel que $vq_i = v_i$ quel que soit $i \in I$.

1.6.4. Soient I une catégorie petite, $\mathcal{C}$ une catégorie et F un foncteur de I dans $\mathcal{C}$. Alors F détermine un foncteur $F^{\mathrm{o}} : I^{\mathrm{o}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ entre les catégories opposées. Par les propriétés universelles décrites dans le sous-paragraphe précédent, on obtient que F admet une limite projective (resp. limite inductive) si et seulement si F^{o} admet une limite inductive (resp. limite projective). En outre, un objet X de $\mathcal{C}$ est une limite projective (resp. limite inductive) de F si et seulement si, vu comme objet de $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$, X est une limite inductive (resp. limite projective) du foncteur opposé F^{o}.

1.6.5. Soit I une catégorie petite. Tout foncteur de I dans une catégorie $\mathcal{C}$ peut être illustré par un diagramme de morphismes de $\mathcal{C}$. Les limites projectives/injectives de certains diagrammes portent de noms spéciaux (cf. la liste au-dessous, où dans les graphes on omit les flèches correspondant aux morphismes d'identité).

diagramme	limite projective	limite inductive
$\varnothing$	*objet terminal*	*objet initial*
$\bullet\ \bullet \cdots \bullet\ \bullet$	*produit*	*coproduit*
$\bullet \rightrightarrows \bullet$	*noyau*	*conoyau*
$\begin{array}{ccc}\bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \\ \bullet & & \end{array}$		*coproduit cofibré*
$\begin{array}{ccc} & & \bullet \\ & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$	*produit fibré*	

1.6.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Il existe un unique foncteur de la catégorie vide dans $\mathcal{C}$. Si ce foncteur admet une limite projective, on dit que la catégorie $\mathcal{C}$ admet un objet terminal et on appelle la limite projective du foncteur *objet terminal* de $\mathcal{C}$. Par la propriété universelle de la limite projective, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de X dans l'objet terminal de $\mathcal{C}$ (si ce dernier existe). De façon similaire, si le foncteur de la catégorie vide dans $\mathcal{C}$ admet une limite inductive, on dit que $\mathcal{C}$ admet un *objet initial*, qui est la limite inductive du foncteur. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ il existe un unique morphisme de l'objet initial dans X.

1.6.7. Soit I un ensemble. On le considère comme une catégorie où l'ensemble des morphismes de $i \in I$ vers $j \in I$ est vide lorsque $i \neq j$, et égal à $\{1_i\}$ lorsque $i = j$. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, tout foncteur F de I dans $\mathcal{C}$ s'identifie à une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$. Si le foncteur F admet une limite projective, on dit que la famille d'objets $(X_i)_{i\in I}$ admet un *produit*, et on désigne par $\prod_{i\in I} X_i$ la limite projective du foncteur F. Par la propriété universelle de la limite projective, pour tout $j \in I$ on a un morphisme universel $\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$. En outre, si Y est un objet de $\mathcal{C}$ et si $(f_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ est une famille de morphismes, alors il existe un unique morphisme $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ tel que $\mathrm{pr}_i\, f = f_i$ pour tout $i \in I$. On utilisera l'expression $(f_i)_{i\in I}$ pour désigner le morphisme f.

De façon similaire, si le foncteur F admet une limite inductive, on dit que la famille d'objets $(X_i)_{i\in I}$ admet un *coproduit*, noté $\coprod_{i\in I} X_i$. Pour tout $j \in I$, on a un morphisme universel $\mathrm{in}_j : X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ de sorte que la famille $(\mathrm{in}_j)_{i\in I}$ forme l'objet universel du foncteur représentable $X \mapsto \mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$ (cf. §§1.6.2–1.6.3). Si Y est un objet de $\mathcal{C}$ et si $(g_i : X_i \to Y)$ est une famille de morphismes, alors il existe un unique morphisme $g : \coprod_{i\in I} X_i \to Y$ tel que $g\, \mathrm{in}_i = g_i$ pour tout $i \in I$.

1.6.8. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de $\mathcal{C}$. Si le diagramme admet une limite projective, on dit que f et g admettent un *produit fibré*, et on utilise l'expression $X \times_S Y$ pour désigner le produit fibré de f et g. Par la propriété universelle de la limite projective, on a des morphismes universels $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X$ et $\mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ qui vérifient $f\,\mathrm{pr}_1 = g\,\mathrm{pr}_2$. En outre, si Z est un objet de $\mathcal{C}$ et si $u : Z \to X$ et $v : Z \to Y$ sont des morphismes tels que $fu = gv$, alors il existe un unique morphisme $(u, v)_S : Z \to X \times_S Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "(u,v)_S"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Si un diagramme de morphisme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

identifie (Z, u, v) au produit fibré de f et de g, on dit que le diagramme est *cartésien*, noté

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

1.6.9. Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "②"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ U \arrow[r, "t"'] & T \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{C}$.

(1) Si les deux carrés ① et ② sont cartésiens, alors le carré extérieur

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "fg"] \arrow[d, "\gamma"'] & ③ & X \arrow[d, "\alpha"] \\ U \arrow[rr, "st"'] & & S \end{tikzcd}$$

est cartésien.

(2) Si le carré ② et le carré extérieur ③ sont cartésiens, alors le carré à gauche ① est aussi cartésien.

Démonstration. — (1) Soient W un objet de $\mathcal{C}$ et $u : W \to X$ et $v : W \to U$ des morphismes tels que $\alpha u = stv$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drrr, bend left, "u"] \arrow[dr, dotted, "\psi"'] \arrow[drr, dotted, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & & \\ & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "②"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ & U \arrow[r, "t"'] & T \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

Comme le carré ② est cartésien, il existe un unique morphisme $\varphi : W \to Y$ tel que $u = f\varphi$ et $tv = \beta\varphi$. Comme le carré ① est cartésien, il existe un unique morphisme

$\psi : W \to Z$ tel que $v = \gamma\psi$ et $\varphi = g\psi$. On en déduit que ψ est l'unique morphisme de W dans Z tel que $u = fg\psi$ et $v = \gamma\psi$. Le carré extérieur ③ est donc cartésien.

(2) Soient R un objet de $\mathcal{C}$ et $a : R \to Y$ et $b : R \to U$ deux morphismes tels que $\beta a = tb$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[dr, dotted, "\eta"] \arrow[drr, bend left, "a"] \arrow[ddr, bend right, "b"'] & & & \\ & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "②"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ & U \arrow[r, "t"'] & T \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

On a $\alpha fa = s\beta a = stb$. Comme le carré extérieur ③ est cartésien, il existe un unique morphisme $\eta : R \to Z$ tel que $fa = fg\eta$ et $b = \gamma\eta$. En outre, comme le carré ② est cartésien, le morphisme a est le seul morphism de R dans Y tel que $\alpha fa = stb$. Comme

$$\alpha fg\eta = s\beta g\eta = st\gamma\eta = stb,$$

on obtient $a = g\eta$ et donc η est l'unique morphisme de R dans Z tel que $a = g\eta$ et $b = \gamma\eta$. Le carré ① est donc cartésien. □

1.6.10. Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Alors f est un monomorphisme si et seulement si le carré suivant est cartésien*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Par la propriété universelle du produit fibré, le carré est cartésien si et seulement si, pour tout objet Z de $\mathcal{C}$ et tous morphismes $u : Z \to X$ et $v : Z \to X$, si $fu = fv$, alors il existe un unique morphisme $w : Z \to X$ tel que $u = 1_X w = w$ et $v = 1_X w = w$ (c'est-à-dire $u = v$). Cela revient à dire que f est un monomorphisme dans $\mathcal{C}$. □

1.6.11. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes dans $\mathcal{C}$. Si le diagramme admet une limite inductive, on dit que f et g admettent un *coproduit cofibré*, et on utilise l'expression $X \amalg_S Y$ pour désigner le coproduit cofibré de f et g. Par la propriété universelle de la limite inductive, on a des morphismes universels $i_1 : X \to X \amalg_S Y$ et $i_2 : Y \to X \amalg_S Y$. En outre, si Z est un objet de $\mathcal{C}$ et si $u : X \to Z$ et $v : Y \to Z$ sont des morphismes tels que $uf = vg$, alors il existe un unique morphisme $u \amalg_S v :\to X \amalg_S Y \to Z$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\
Y \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "v"'] & X \amalg_S Y \arrow[dr, dotted, "u \amalg_S v"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Si un diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}$$

identifie (Z, u, v) au coproduit cofibré de f et de g, on dit que le diagramme est *cocartésien.*

1.6.12. Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "②"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\
U \arrow[r, "t"'] & T \arrow[r, "s"'] & S
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{C}$.

(1) Si les deux carrés ① et ② sont cocartésiens, alors le carré extérieur

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "③"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\
U \arrow[r, "st"'] & S
\end{tikzcd}$$

est cocartésien.

(2) Si le carré ① et le carré extérieur ③ sont cocartésiens, alors le carré ② est aussi cocartésien.

Démonstration. — Le résultat provient de la proposition 1.6.9 par passage à la catégorie opposée. □

1.6.13. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ un diagramme de morphismes dans $\mathcal{C}$. Si ce diagramme admet une limite projective, on dit que f et g admet un *noyau* et on désigne par $\mathrm{Ker}(f,g)$ la limite projective du digramme. Par la propriété universelle de la limite projective, on a un morphisme universel i dans $\mathrm{Ker}(f,g)$ vers X tel que $fi = gi$. En outre, pour tout objet Z et tout morphisme $h : Z \to X$ vérifiant la relation $fh = gh$, il existe un unique morphisme $h' : Z \to \mathrm{Ker}(f,g)$ tel que $ih' = h$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f,g) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, dotted, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si un digramme

$$X' \xrightarrow{j} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

identifie $j : X' \to X$ au noyau de (f,g), on dit que le diagramme est *exact à gauche.*

De façon similaire, si le diagramme $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ admet une limite inductive, on dit que f et g admettent un conoyau et on désigne par $\mathrm{Coker}(f,g)$ la limite inductive du diagramme. D'après la propriété universelle de la limite inductive, on a un morphisme universel π de Y vers $\mathrm{Coker}(f,g)$ tel que, pour tout objet W de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $u : Y \to W$ vérifiant $uf = ug$, il existe un unique morphisme $u' : \mathrm{Coker}(f,g) \to W$ tel que $u'\pi = u$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "u"'] & \mathrm{Coker}(f,g) \arrow[d, dotted, "u'"] \\
& & W
\end{tikzcd}$$

Si un digramme

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} Y'$$

identifie $p : Y \to Y'$ au conoyau de (f,g), on dit que le diagramme est *exact à droite.*

1.6.14. Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ un diagramme de morphismes dans $\mathcal{C}$, et $h : Y \to Z$ un monomorphisme. Soit $i : \mathrm{Ker}(f,g) \to X$ le noyau de (f,g). Alors i est également le noyau de (hf, hg).*

Démonstration. — Soient A un objet de $\mathcal{C}$ et $\varphi : A \to X$ un morphisme tel que $hf\varphi = hg\varphi$. Comme h est un monomorphisme, on a $f\varphi = g\varphi$. Donc il existe un unique morphisme $\widetilde{\varphi} : A \to \mathrm{Ker}(f,g)$ tel que $i\widetilde{\varphi} = \varphi$. $\square$

1.6.15. Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si le produit de toute famille d'objets dans $\mathcal{C}$ existe et si tout diagramme de la forme $X \rightrightarrows Y$ de morphismes dans $\mathcal{C}$ admet un noyau, alors tout foncteur d'une catégorie petite vers $\mathcal{C}$ admet une limite projective.*

Démonstration. — Soient I une catégorie petite et $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur. Soient X le produit des $F(i)$ et $\mathrm{pr}_i : X \to F(i)$ les morphismes universels. Soit

$$Y = \prod_{\substack{(j,k)\in I^2 \\ f:j\to k}} F(k).$$

Soient s et t deux morphismes de X vers Y, où s est induit par la famille $(\mathrm{pr}_k)_{f:j\to k}$, et t est induit par $(F(f)\,\mathrm{pr}_j)_{f:j\to k}$. Alors le noyau de s et t est la limite projective du foncteur F. □

1.6.16. Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si le coproduit de toute famille d'objets dans $\mathcal{C}$ existe et si tout diagramme de la forme $X \rightrightarrows Y$ de morphismes dans $\mathcal{C}$ admet un conoyau, alors tout foncteur d'une catégorie petite vers $\mathcal{C}$ admet une limite inductive.*

Démonstration. — Le résultat provient de la proposition 1.6.15, quitte à passer à la catégorie opposée. □

1.6.17. Les deux propositions précédentes admettent des variants. Par la même méthode, on peux démontrer que, si dans une catégorie $\mathcal{C}$ tout produit (resp. coproduit) d'une famille *finie* d'objets existe et que tout couple de morphismes des mêmes source et but (cf. §1.2.2) admet un noyau (resp. conoyau), alors tout foncteur d'une catégorie finie (cf. §1.2.4) dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective (resp. inductive).

1.6.18. Les limites projectives et inductives sont des constructions fonctorielles. Soit I une catégorie petite et $\mathcal{C}$ une catégorie. Si tout foncteur de I vers $\mathcal{C}$ admet une limite projective (resp. inductive), alors $\varprojlim$ (resp. $\varinjlim$) définit un foncteur de la catégorie $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$ vers $\mathcal{C}$. Cela résulte des propriétés universelles des limites. En outre, pour toute catégorie petite J, tout foncteur de I dans $\mathbf{Fon}(J, \mathcal{C})$ admet aussi une limite projective (resp. limite inductive), qui peut être construite point par point, comme expliqué au-dessous.

Tout foncteur F de I dans $\mathbf{Fon}(J, \mathcal{C})$ peut être considéré comme un foncteur de la catégorie produit $I \times J$ dans $\mathcal{C}$ qui envoie $(i, j) \in I \times J$ en $F(i)(j)$, ou encore comme un foncteur $(F_j)_{j\in J}$ de J dans $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$ (cf. la notation 1.4.2). Par la fonctorialité de la limite projective (resp. limite inductive), on obtient un foncteur $(\varprojlim F_j)_{j\in J}$ (resp. $(\varinjlim F_j)_{j\in J}$) de J dans $\mathcal{C}$, sous condition que tout foncteur de I dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective (resp. limite inductive). Ce foncteur, vu comme un objet de la catégorie $\mathbf{Fon}(J, \mathcal{C})$ est la limite projective (resp. limite inductive) de F (considéré comme un foncteur de I dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(J, \mathcal{C})$). En effet, si $G =$

$(X_j)_{j\in J}$ est un foncteur de J dans $\mathcal{C}$ et si $\varphi \in \mathrm{Nat}(\Delta_G, F)$ est un morphisme dans la catégorie $\mathbf{Fon}(I, \mathbf{Fon}(J,\mathcal{C}))$, alors φ détermine pour chaque $j \in J$ un morphisme de foncteurs $\varphi_j : \Delta_{X_j} \to F_j$ dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(I,\mathcal{C})$. Dans le cas où tout foncteur de I dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective, le morphisme de foncteur φ_j induit par la propriété universelle de la limite projective un unique morphisme $\widetilde{\varphi}_j : X_j \to \varprojlim F_j$. Les morphismes $(\widetilde{\varphi}_j)_{j\in J}$ forment un morphisme de foncteurs $\widetilde{\varphi} : (X_j)_{j\in J} \to (\varprojlim F_j)_{j\in J}$ qui est l'unique morphisme tel que φ se factorise par $\Delta(\widetilde{\varphi})$. Ainsi le foncteur $(\varprojlim F_j)_{j\in J}$ est la limite projective de F.

Similairement, si $\psi \in \mathrm{Nat}(F, \Delta_G)$ est un morphisme dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(I, \mathbf{Fon}(J,\mathcal{C}))$, alors ψ détermine pour chaque $j \in J$ un morphisme de foncteurs $\psi_j : F_j \to \Delta_{X_j}$ dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(I,\mathcal{C})$. Dans le cas où tout foncteur de I dans $\mathcal{C}$ admet une limite inductive, le morphisme de foncteurs ψ_j induit par la propriété universelle de la limite inductive un unique morphisme $\widetilde{\psi}_j : \varinjlim F_j \to X_j$. Les morphismes $(\widetilde{\psi}_j)_{j\in J}$ forment un morphisme de foncteurs $\widetilde{\psi} : (\varinjlim F_j)_{j\in J} \to (X_j)_{j\in J}$ qui est l'unique morphisme tel que ψ se factorise par $\Delta(\widetilde{\psi})$. Ainsi le foncteur $(\varinjlim F_j)_{j\in J}$ est la limite inductive de F.

1.6.19. Exemple. — Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Le produit cartésien des E_i est le produit de cette famille dans la catégorie des ensembles. La réunion disjointe des E_i est le coproduit de cete famille dans la catégorie des ensembles. Si $f, g : E \to F$ sont deux applications d'ensembles, leur noyau est le sous-ensemble de E des $x \in E$ tels que $f(x) = g(x)$; leur conoyau est le quotient de F modulo la relation d'équivalence engendrée par

$$\text{«}y_1 \sim y_2 \textit{ si et seulement s'il existe } x \in E \textit{ vérifiant } f(x) = y_1 \textit{ et } g(x) = y_2\text{»}.$$

D'après les propositions 1.6.15 et 1.6.16, tout foncteur d'une catégorie petite vers **Ens** admet une limite projective et une limite inductive.

Soient I une catégorie petite et $F : I \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On peut construire explicitement la limite projective de F comme le sous-ensemble de $\prod_{i\in I} F(i)$ des éléments $(x_i)_{i\in I}$ tel que $F(u)(x_i) = x_j$ pour tout morphisme $u : i \to j$ dans I.

1.6.20. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $\mathcal{D}$ une catégorie. On suppose que la catégorie $\mathcal{D}$ est complète (resp. cocomplète) (cf. §1.6.2). Si I est une catégorie petite et $F : I \to \mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est un foncteur, alors F détermine un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(I,\mathcal{D})$ dont la limite projective (resp. limite inductive) point par point donne un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, qui s'identifie à la limite projective (resp. limite inductive) du foncteur F (cf. §1.6.18). On obtient donc que la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est complète (resp. cocomplète). En particulier, pour toute catégorie petite $\mathcal{C}$, la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(\mathcal{C},\mathbf{Ens})$ est complète et cocomplète, où **Ens** désigne la catégorie des ensembles.

1.6.21. Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, I une catégorie petite, F et G deux foncteurs de I dans $\mathcal{C}$, et $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs.*

(1) *Si, pour tout $i \in I$, le morphisme $\varphi_i : F(i) \to G(i)$ dans $\mathcal{C}$ est un monomorphisme, alors φ est un monomorphisme dans la catégorie de foncteur $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$.*

(2) *La réciproque de l'énoncé précédent est vraie si tout produit fibré existe dans la catégorie $\mathcal{C}$.*

Démonstration. — (1) Soit $i \in I$. Comme φ_i est un monomorphisme, le carré

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "1_{F(i)}"] \arrow[d, "1_{F(i)}"'] & F(i) \arrow[d, "\varphi_i"] \\ F(i) \arrow[r, "\varphi_i"'] & G(i) \end{tikzcd}$$

est cartésien (cf. la proposition 1.6.10). On en déduit que le carré

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "1_F"] \arrow[d, "1_F"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ F \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

de morphismes de foncteurs est cartésien (cf. §Rem :limite dans une catégorie de foncteurs). Encore par la proposition 1.6.10 on obtient que le morphisme de foncteur φ est cartésien.

(2) On suppose que $\varphi : F \to G$ est un monomorphisme de foncteurs. C'est-à-dire que le carré

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "1_F"] \arrow[d, "1_F"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ F \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

de morphismes de foncteurs est cartésien. Comme tout produit fibré existe dans la catégorie $\mathcal{C}$, on peut déterminer le produit fibré $F \times_G F$ point par point (cf. §1.6.18). On obtient alors que le carré

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "1_{F(i)}"] \arrow[d, "1_{F(i)}"'] & F(i) \arrow[d, "\varphi_i"] \\ F(i) \arrow[r, "\varphi_i"'] & G(i) \end{tikzcd}$$

de morphismes dans $\mathcal{C}$ est cartésien et donc φ_i est un monomorphisme pour tout i. $\square$

1.7. Foncteurs préservant des limites

1.7.1. Proposition. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et F un foncteur d'une catégorie petite I dans $\mathcal{C}$. Si F admet une limite projective, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a*

$$\varprojlim (h_X F) \cong h_X(\varprojlim F)$$

dans la catégorie des ensembles. En d'autres termes, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\varprojlim_{i\in I} \mathcal{C}(X, F(i)) \cong \mathcal{C}(X, \varprojlim F).$$

Démonstration. — On note $Y = \varprojlim F$ et on désigne par $p_i : Y \to F(i)$ les morphismes universels. Si $f : i \to j$ est un morphisme de I, alors on a $p_j = F(f)p_i$, d'où $h_X(p_j) = h_X(F(f))h_X(p_i)$. Si M est un ensemble et si $(q_i : M \to \mathcal{C}(X, F(i)))_{i\in I}$ est une famille de morphismes tels que $q_j(x) = h_X(F(f))q_i(x) = F(f)q_i(x)$ pour tout morphisme $f : i \to j$ et tout $x \in M$, alors il existe un unique morphisme $g(x) \in \mathcal{C}(X, Y)$ tel que $q_i(x) = p_i g(x)$ quel que soit $i \in I$. On obtient alors une unique application $g : M \to h_X(Y)$ tel que $q_i = h_X(p_i)g$ pour tout i. Ainsi $h_X(Y)$ et les morphismes $h_X(p_i)$ vérifient les propriétés universelles définissant $\varprojlim(h_X F)$. Le résultat est donc démontré. □

1.7.2. Corollaire. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et F un foncteur d'une catégorie petite I dans $\mathcal{C}$. Si F admet une limite inductive, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\varprojlim_{i\in I} \mathcal{C}(F(i), X) \cong \mathcal{C}(\varinjlim F, X).$$

Démonstration. — Par passage aux catégories opposées, on obtient le résultat en s'appuyant sur la proposition 1.7.1. □

1.7.3. Soit I une catégorie petite. On dit que I est *filtrante* si elle est non-vide et si les conditions suivantes sont vérifiée :

(a) pour tout couple (i, j) d'objets de I, il existe un objet k de I et des morphismes $i \to k$ et $j \to k$;

(b) si i et j sont deux objets de I et si u et v sont des morphismes de i vers j, il existe un objet k de I et un morphisme $w : j \to k$ tels que $wu = wv$.

1.7.4. Proposition. — *Soient I une catégorie petite filtrante et J une catégorie finie. Si $(F_j)_{j\in J}$ est un foncteur de J dans $\mathbf{Fon}(I, \mathbf{Ens})$, alors on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\varinjlim(\varprojlim_{j\in J} F_j) \cong \varprojlim_{j\in J} \varinjlim F_j.$$

Démonstration. — Soit G la limite projective $\varprojlim_j F_j$. Par la propriété universelle de la limite projective, on a des morphismes universels $(G \to F_j)_{j\in I}$. Chaque morphisme universel $G \to F_j$ induit, par la fonctorialité de la limite inductive, un morphisme de $\varinjlim G$ vers $\varinjlim F_j$ que l'on note comme λ_j. Ces morphismes induisent, par la propriété universelle de la limite projective, un morphisme Φ de $\varinjlim G$ vers $\varprojlim_{j\in J} \varinjlim F_j$.

Il reste à montrer que Φ est un isomorphisme dans la catégorie des ensembles, c'est-à-dire une bijection entre des ensembles. On peut construire $\varinjlim F_j$ comme

$$\coprod_{i\in I} F_j(i) \Big/ \sim,$$

où pour $a \in F_j(i)$ et $b \in F_j(i')$, $a \sim b$ si et seulement s'il existe des morphismes [1] $\varphi : i \to i''$ et $\psi : i' \to i''$ on a $F_j(\varphi)(a) = F_j(\psi)(b)$.

Montrons d'abord que Φ est une application injective. Soient i et i' deux objets de I, et

$$\boldsymbol{a} = (a_j)_{j\in J} \in \varprojlim_{j\in J} F_j(i), \quad \boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J} \in \varprojlim_{j\in J} F_j(i').$$

On utilise les expressions $[\boldsymbol{a}]$ et $[\boldsymbol{b}]$ pour désigner les images de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dans $\varinjlim \varprojlim_{j\in J} F_j$ respectivement. Si $\Phi([\boldsymbol{a}]) = \Phi([\boldsymbol{b}])$, alors pour tout $j \in J$, $[\boldsymbol{a}]$ et $[\boldsymbol{b}]$ on la même image dans $\varinjlim F_j$ par l'application λ_j. On en déduit que a_j et b_j représente la même classe d'équivalence dans $\varinjlim F_j$. Comme J est une catégorie finie et I est une catégorie filtrante, il existe alors deux morphismes $\varphi : i \to i''$ et $\psi : i' \to i''$ dans I tels que $F_j(\varphi)(a_j) = F_j(\psi)(b_j)$. On obtient donc $[\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b}]$.

Il reste à vérifier que Φ est une application surjective. Soit $([u_j])_{j\in J}$ un élément de $\varprojlim_{j\in J} \varinjlim F_j$, où on considère u_j comme un élément de $\coprod_{i\in I} F_j(i)$. Comme I est une catégorie filtrante et J est une catégorie finie, sans perte de généralité on peut supposer qu'il existe $i \in I$ tel que $u_j \in F_j(i)$ pour tout $j \in J$. Si $j \to j'$ est un morphisme dans J, qui correspond à une transformation naturelle $f : F_j \to F_{j'}$, alors il existe des morphismes $\varphi, \psi : i \to i'$ dans I tels que

$$f_{i'}(F_j(\varphi)(u_j)) = F_j(\varphi)(f_i(u_j)) = F_{j'}(\psi)(u_{j'}).$$

Comme J est une catégorie finie (où on utilise la finitude des morphismes), et I est une catégorie filtrante (où on utilise la deuxième condition dans la définition de catégorie filtrante), il existe un morphisme $\eta : i \to i''$ tel que, pour tout morphisme $f : j \to j'$ de J (considéré aussi comme une transformation naturelle de F_j vers $F_{j'}$) on a

$$f_i(F_j(\eta)(u_j)) = F_{j'}(\eta)(u_{j'}).$$

Cela montre que $(F_j(\eta)(u_j))_{j\in J} \in \varprojlim_{j\in J} F_j(i'')$ et

$$([u_j])_{j\in J} = \Phi([(F_j(\eta)(u_j))_{j\in J}]).$$

□

1. Ici on utilise la condition que la catégorie I est filtrante.

1.7.5. Soient $\mathscr{L}$ une structure algébrique admissible et $\mathcal{C}$ la catégorie des modèles de $\mathscr{L}$. Soit $w : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur d'oubli. Si I est une catégorie petite et $F : I \to \mathcal{C}$ est un foncteur, alors la limite projective du foncteur composé wF est naturellement muni de la structure algébrique $\mathscr{L}$, qui devient la limite projective de du foncteur F.

Similairement, si I est une catégorie *filtrante* et si $F : I \to \mathcal{C}$ est un foncteur, alors F admet une limite inductive. En effet, la limite inductive du foncteur wF, qui est un quotient de la réunion disjointe de $(F(i))_{i\in I}$, est naturellement muni de la structure algébrique $\mathscr{L}$ définissant la catégorie $\mathcal{C}$. Le passage au quotient des fonctions est possible grâce à l'hypothèse que la catégorie I soit filtrante. Si $(x_\ell)_{\ell=1}^n$ est une famille finie d'éléments dans la réunion disjointe de $(F(i))_{i\in I}$, on peut trouver un objet $k \in I$ et des éléments $(y_\ell)_{\ell=1}^n$ dans $F(k)$ de sorte que y_ℓ et x_ℓ soient dans la même classe d'équivalence de l'ensemble $\varinjlim wF$. La structure algébrique se déscend alors sur l'ensemble quotient. Cette observation sera utile plus loin dans la construction explicite de la localisation.

La condition que la catégorie I soit filtrante est essentielle pour identifier la limite inductive de F à celle de wF munie de la structure algébrique naturelle. On peut par exemple considérer le coproduit cofibré dans la catégorie **An** des anneaux commutatifs et unifères. Soient k un anneau commutatifs et unifères et A et B deux k-algèbres. Le coproduit cofibré de A et B au-dessus de k est donné par le produit tensoriel $A \otimes_k B$ (qui est naturellement muni d'une structure d'anneau telle que $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$). En général, ensemblistement $A \otimes_k B$ n'est pas en bijection naturelle avec le coproduit cofibré de A et B au-dessus de k dans la catégorie des ensembles.

Le résultat de la commutativité de la limite inductive filtrante et la limite projective finie est encore vrai pour la catégorie des modèles d'une structure algébrique admissible. La démonstration est identique à celle de la Proposition 1.7.4.

1.7.6. Soit A un anneau. Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de A-modules, alors le produit cartésien des M_i est le produit de $(M_i)_{i\in I}$ dans la catégorie A-**Mod** des A-modules ; la somme directe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est le coproduit de $(M_i)_{i\in I}$ dans la catégorie A-**Mod**. Si $f, g : M \to N$ sont deux homomorphismes de A-modules, leur noyau est le sous-A-module de M des $x \in M$ tel que $f(x) = g(x)$ (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f - g)$) ; leur conoyau est le A-module quotient de N par l'image de $f - g$. D'après les propositions 1.6.15 et 1.6.16, tout foncteur d'une catégorie petite vers A-**Mod** admet une limite projective et une limite inductive.

La localistion est un cas particulier de limite inductive filtrante dans la catégorie des modules qui jouera un rôle important pour ce livre. On dit qu'un sous-ensemble S de A est *multiplicatif* s'il contient l'élément unité 1 et s'il est stable par la multiplication. On peut le considérer comme une catégorie petite (S est alors l'ensemble des objets) où l'ensemble des morphismes de s_1 vers s_2 est $\{s \in S \mid s_1 s = s_2\}$. Si s_1 et s_2 sont deux objets de S, alors $s_2 : s_1 \to s_1 s_2$ et $s_1 : s_2 \to s_1 s_2$ sont deux morphismes de s_1 et s_2 vers $s_1 s_2$ respectivement. En outre, si s_1 et s_2 sont deux objets de S et s, t sont deux morphismes de s_1 vers s_2, alors $s_1 : s_2 \to s_1 s_2$ est un morphisme dans S tel que $s_1 s = s_1 t$. On obtient alors que la catégorie S est filtrante.

Si M est un A-module et si F_M est le foncteur de la catégorie S vers A-**Mod** qui envoie tout $t \in S$ en M et envoie tout morphisme $s : s_1 \to s_2$ en l'homothétie $M \to M$, $x \mapsto sx$, la limite inductive du foncteur F_M est appelée la *localisation* de M par S, notée comme $S^{-1}M$ ou $M[S^{-1}]$. Ensemblistement le A-module $S^{-1}M$ peut être construit comme le quotient de $S \times M$ (dont l'élément (s, x) est noté comme x/s, où $x \in M$ et $s \in S$) modulo la relation d'équivalence (voir la remarque 1.7.5)

$$x/s \sim y/t \iff \exists\, u \in S \text{ tel que } u(tx - sy) = 0.$$

D'après la proposition 1.7.4 (voir aussi la remarque 1.7.5), le foncteur de A-**Mod** vers A-**Mod**, qui envoie M en $S^{-1}M$, préserve les limites projectives finies.

1.8. Foncteurs adjoints

1.8.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteur. On dit que F est *adjoint à gauche* de G et que G est *adjoint à droite* de F si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout objet Y de $\mathcal{D}$ on a un isomorphisme fonctoriel en X et Y

$$\mathcal{C}(X, G(Y)) \cong \mathcal{D}(F(X), Y).$$

1.8.2. Exemples. —

(a) Soient I une catégorie petite et $\mathcal{C}$ une catégorie telle que tout foncteur de I dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective (resp. inductive). Alors le foncteur $\varprojlim$ (resp. $\varinjlim$) de la catégorie de foncteur $\mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ est adjoint à droite (resp. gauche) du foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathbf{Fon}(I, \mathcal{C})$ (cf. §1.6.2) qui envoie tout objet X sur Δ_X.

(b) Soient A un anneau et M un A-module. Alors le foncteur $- \otimes_A M : A$-**Mod** $\to$ A-**Mod** est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$. En effet, pour tous A-modules N et P on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_A(N \otimes_A M, P) \cong \mathrm{Bil}_A(N \times M, P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M, P)),$$

où $\mathrm{Bil}_A(N \times M, P)$ désigne l'ensemble des applications A-bilinéaires de $N \times M$ dans P.

1.8.3. Proposition. — *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur qui est adjoint à gauche d'un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Soit I une catégorie petite.*

(1) Si $(X_i)_{i \in I}$ est un foncteur de I dans $\mathcal{C}$ qui admet une limite inductive, alors le foncteur $(F(X_i))_{i \in I}$ admet aussi une limite inductive. De plus, on a $\varinjlim F(X_i) \cong F(\varinjlim X_i)$.

(2) Si $(Y_i)_{i\in I}$ est un foncteur de I dans $\mathcal{D}$ qui admet une limite projective, alors le foncteur $(G(Y_i))_{i\in I}$ admet aussi une limite projective, et on a $\varprojlim G(Y_i) \cong G(\varprojlim Y_i)$.

Démonstration. — Pour tout $Y \in \mathcal{D}$, on a un isomorphisme fonctoriel en Y :

$$\mathcal{D}(F(X_i), Y) \cong \mathcal{C}(X_i, G(Y)).$$

En prenant la limite projective par rapport à $i \in I$ on obtient

$$\varprojlim \mathcal{D}(F(X_i), Y) \cong \varprojlim \mathcal{C}(X_i, G(Y))$$

D'après le corollaire 1.7.2, on en déduit

$$\mathcal{D}(\varinjlim F(X_i), Y) \cong \mathcal{C}(\varinjlim X_i, G(Y)) \cong \mathcal{D}(F(\varinjlim X_i), Y),$$

d'où $\varinjlim F(X_i) \cong F(\varinjlim X_i)$ puisqu'ils représentent le même foncteur.

Par passage aux catégories opposées, on déduit le deuxième énoncé du premier. □

1.8.4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, I et J deux catégorie petite. On suppose que tout foncteur de J dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective. Considérons le foncteur $\varprojlim$: $\mathbf{Fon}(J, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ qui est adjoint à droite du foncteur diagonal Δ (cf. §1.8.2). En utilisant la proposition 1.8.3, on en déduit que, si $(F_i)_{i\in I}$ est un foncteur de I dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fon}(J, \mathcal{C})$, qui admet une limite projective, alors le foncteur $(\varprojlim F_i)_{i\in I}$ de I dans $\mathcal{C}$ admet aussi une limite projective. De plus, on a

$$\varprojlim_{i\in I}(\varprojlim_{J} F_i) \cong \varprojlim_{J}(\varprojlim_{i\in I} F_i).$$

1.9. Limites inductives de foncteurs représentables

Dans ce paragraphe, on montre que tout foncteur d'une catégorie petite vers la catégorie des ensembles est isomorphe à une limite inductive de foncteurs représentables.

1.9.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et F un foncteur de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles. On désigne par I_F l'ensemble des couples (A, ρ), où A est un objet de $\mathcal{C}$ et ρ est un élément de $F(A)$. Si (A, ρ) et (A', ρ') sont deux éléments de I_F, on définit

$$I_F\big((A, \rho), (A', \rho')\big) = \{f \in \mathcal{C}(A, A') \,|\, F(f)(\rho) = \rho'\}.$$

Alors I_F est une catégorie petite.

1.9.2. Lemme. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $F, G : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ deux foncteurs. L'application*

$$\mathrm{Nat}(F, G) \longrightarrow \varprojlim_{(A,\rho)\in I_F} G(A) \tag{1.1}$$

qui envoie $\varphi \in \mathrm{Nat}(F, G)$ sur $(\varphi_A(\rho))_{(A,\rho)\in I_F}$ est une bijection, où dans la limite projective on a considéré le foncteur de I_F dans **Ens** *qui envoie (A, ρ) sur $G(A)$ et $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ sur $G(f) : G(A) \to G(A')$.*

Démonstration. — Par définition, $\mathrm{Nat}(F, G)$ est le sous-ensemble de

$$\prod_{A\in\mathcal{C}} \mathbf{Ens}(F(A), G(A)) = \prod_{(A,\rho)\in I_F} G(A)$$

des éléments

$$(\varphi_A : F(A) \to G(A))_{A\in\mathcal{C}} = (\varphi_A(\rho))_{(A,\rho)\in I_F}$$

tels que $\varphi_{A'} F(f) = G(f)\varphi_A$ pour tout morphisme $f : A \to A'$. Cette condition renvient à dire que l'on a

$$\varphi_{A'}(\rho') = G(f)(\varphi_A(\rho))$$

pour tout morphisme $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ dans I_F. Le résultat est donc démontré. □

1.9.3. Théorème. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. La famille de morphismes de foncteurs $(\rho : h_A \to F)_{(A,\rho)\in I_F}$ définit un isomorphisme*

$$\varinjlim_{(A,\rho)\in I_F} h_A \cong F, \tag{1.2}$$

où on a considéré $\rho \in F(A)$ comme un morphisme de foncteurs de h_A dans F via le lemme de Yoneda (cf. §1.5.4).

Démonstration. — Pour tout foncteur $G \in \mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Nat}(\varinjlim_{(A,\rho)} h_A, G) \cong \varprojlim_{(A,\rho)} \mathrm{Nat}(h_A, G) \cong \varprojlim_{(A,\rho)} G(A) \cong \mathrm{Nat}(F, G),$$

où le premier isomorphisme provient de la proposition 1.7.1, le deuxième isomorphisme résulte du lemme de Yoneda et le dernière isomorphisme provient du lemme 1.9.2. On obtient alors que $\varinjlim_{(A,\rho)} h_A$ et F représentent le même foncteur de la catégorie $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ vers **Ens**. Ils sont donc isomorphes, compte tenu du corollaire 1.5.7. □