Centre universitaire Abdalhafid Boussouf Mila
Institut des Sciences et Technologie
$2^{\text{ème}}$ année Maths, 2019-2020

TD 2 : **Fonction d'une variable complexe**

Exercice 1
Trouvez les parties réelles et imagénaires des fonctions suivants :

$$a)f(z) = e^{-z}, \quad b)f(z) = ch(z-i), \quad c)f(z) = \frac{iz+1}{1+\bar{z}}.$$

Indication
Soit $z = x + iy$ et $\omega = f(z) = u + iv$
$a)f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$,
$b)f(z) = ch(z-i) = \cosh x\cos(y-1) + i\sinh x\sin(y-1)$,
$c)f(z) = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}} = \dfrac{-2xy - y + x + 1}{(1+x)^2 + y^2} + i\ \dfrac{x^2 - x - y^2 + y}{(1+x)^2 + y^2}$.

Exercice 2
Soit la fonction

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{zRe(z)}{\|z\|} & si \ \ z \neq 0 \\ 0 & si \ \ z = 0 \end{cases}$$

a) Étudier la continuité de f en $z_0 = 0$.
b) Étudier la dérivabilité de f en $z_0 = 0$, que remarquez-vous ?
Indication
a) f continue en z_0 ssi $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
b) f dérivable en z_0 ssi $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et finie.

Exercice 3
Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué
$a)$ $f(z) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\big(y - \dfrac{x}{x^2+y^2}\big)$, sur $\mathbb{C}^*$
$b)$ $f(z) = \|z\|^2 + 2z$, sur $\mathbb{C}$
$c)$ $f(z) = \dfrac{\|z\| + z}{2}$, sur $\mathbb{C}$.
Indication
$f = u + iv$ holomorphe sur ssi $\dfrac{du}{dx}, \dfrac{du}{dy}, \dfrac{dv}{dx}, \dfrac{dv}{dy}$ existes et continues et $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy}, \ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx}$

Exercice 4
Soit la fonction

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que la fonction u est harmonique.
b) Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

Indication

a) u harmonique ssi $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0$

b) Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Exercice 5

Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes ?

$$a) f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad b)\, g(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z^2})}.$$

Indication

a) les points singuliers de f sont 1 et -1 qui sont des pôles simples isolés

b) les points singuliers de g sont $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}^\star$ qui sont des pôles simples isolés

De plus $z = 0$ est une singularité essentielle non isolée

R de la matière : S. Bourourou