

---

---

## TD 1 : Rappel sur les nombres Complexes

---

---

### Exercice 1

Soient  $z = 2 - i$  et  $w = 1 + 3i$ .

Écrire sous la forme algébrique les nombres suivants :

$$a) \frac{z}{w}, \quad b) \frac{zw}{z+w}.$$

### Indication

$$a) \frac{z}{w} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{-1}{10} - \frac{7}{10}i, \quad b) \frac{zw}{z+w} = \frac{25}{13} + \frac{5}{13}i.$$

### Exercice 2

Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :

$$a) z = -1 + i, \quad b) w = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}, \quad c) t = 5.$$

### Indication

$$a) z = -1 + i = \sqrt{2} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right\}, \quad b) w = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}, \quad c) t = 5 = 5 \{ \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) \}$$

### Exercice 3

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivant :

$$\frac{z}{z-1} = i.$$

2. Calculer le module et l'argument de la solution trouvée.

3. Calculer  $\ln(z)$ .

### Indication

1.  $z - (z-1)i = 0$  donc  $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2.  $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\theta = \frac{-\pi}{4}$

3.  $\ln z = \ln|z| + i \arg z$

### Exercice 4

Résoudre l'équation suivante :

$$z^6 + 1 = 0,$$

et représenter les solutions dans le plan complexe.

**Indication**

$z^6 = -1$ , on calcule les racines d'ordre 6 de -1.

**Exercice 5**

Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

a)  $\{z \in \mathbb{C}, |z - 3i| \leq |z - 3|\}$ ,

b)  $\{z \in \mathbb{C}, |z - i| < 3\}$ ,

c)  $\{z \in \mathbb{C}, |z - i| > 3\}$ ,

d)  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}z - \operatorname{Im}z < 1\}$ .

**Indication**

a)  $z \in \mathbb{C}$  donc  $z = x + iy$  donc l'ensemble devient  $y \geq x$

b) l'ensemble c'est le disque de centre  $z_0 = i$  et de rayon  $r = 3$

c) l'ensemble c'est l'extérieure du cercle de centre  $z_0 = i$  et de rayon  $r = 3$

d) l'ensemble c'est la partie dessus de la droite  $y = x - 1$ , la droite non comprise.

R de la matière : S. Bourourou