Chapitre 7: Automate à Pile

Plan

- . Définition
- 2. Configuration, transition et calcul
- 3. Critères d'acceptation
- 4. Automates à piles déterministes

Automates à piles

les automates à piles (AàP) sont des machines abstraites qui affirment, ou pas, l'appartenance d'un mot à un langage. Les langages reconnus par les AàP sont les langages algébriques (Type 2). En plus des composantes des AEF, les AàP possèdent une pile pour le stockage.

Exemple préliminaire

- Les étapes de reconnaissance du langage $\{a^i b^i, i \geq 1\}$ par un AàP pourraient être les suivantes :

1. Lire les a, les stocker dans la pile et ne pas changer d'état;
2. A la rencontre du premier b, dépiler un a et changer d'état;
3. Dépiler un a pour chaque b rencontré;
4. Si les a de la pile se terminent au même moment que les b lus, alors le mot appartient au langage.

Définition :

Un automate à pile est un 7-uplet $A<X,Y,S,S_0,F,I,\#>$

: Symbole de pile vide.

X : Alphabet du mot en entrée

Y : Alphabet utilisé pour la pile

S : Ensemble des états

S_0 : Etat initial

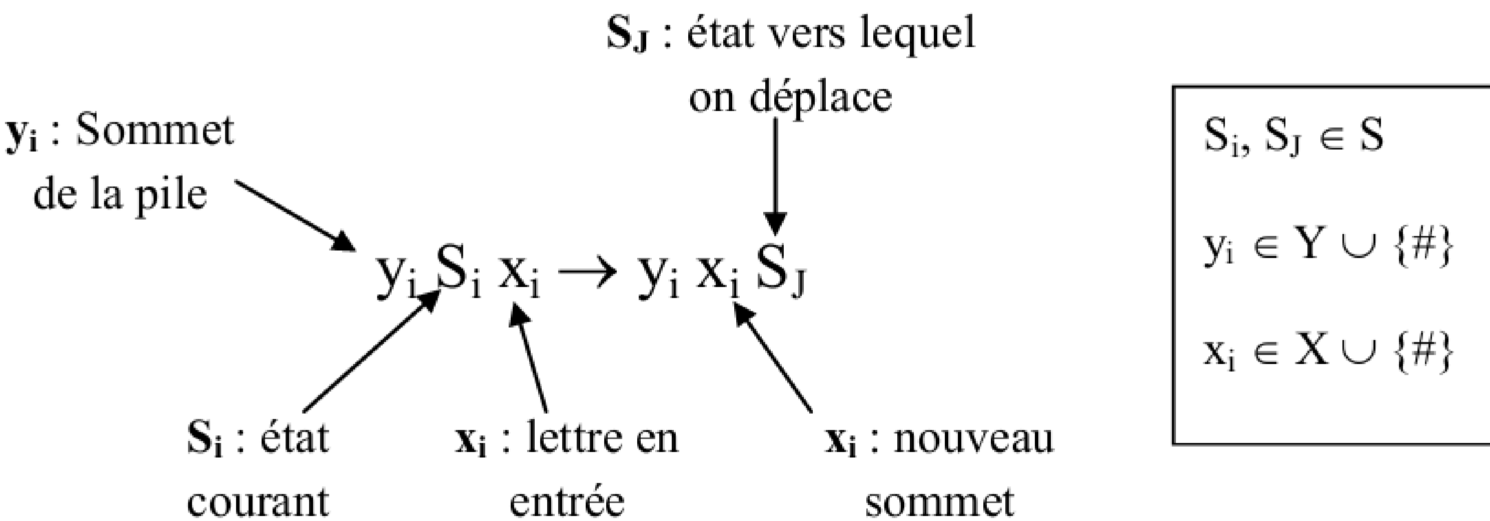
F : Ensemble des états finaux $F \subseteq S$

I : Ensemble des instructions :

$$\mathbf{I : S \times (X \cup \varepsilon) \times Y \rightarrow S \times Y}$$

Opération sur la pile :

- **Empilement**



- Si nous somme à l'état Si et si le sommet de pile est yi et si la lettre sous la tête de lecture est xi alors on emplie xi sur y i (xi nouveau sommet de la pile) et l'automate se déplace à l'état SJ

Opération sur la pile :

- **Dépilement**

$y_i\ S_i\ x_i \rightarrow S_J$ changement de sommet de pile $S_i, S_J \in S$

- **Ni empiler ni dépiler**

c) $\mathbf{y_i\ S_i\ x_i \rightarrow y_i\ S_J}$ **:** ni empilement, ni dépilement.

Exemple 1 :

$$L_1 = \{a^i b^i \,, i > 0\}$$

A<X,Y,S,S_0,F,I,#>

X={a,b}, S={S_0,S_1,S_f}

$\# \; S_0 \; a \rightarrow \# \; a \; S_0$

$a \; S_0 \; a \rightarrow a \; a \; S_0$

$a \; S_0 \; b \rightarrow S_1$

$a \; S_1 \; b \rightarrow S_1$

$\# \; S_1 \rightarrow \# \; S_f$

Exemple 1(suite)

Vérification :

$$\#S_0aaabbb \vdash \#aS_0aabbb$$
$$\vdash \#aaS_0abbb$$
$$\vdash \#aaaS_0bbb$$
$$\vdash \#aaS_1bb$$
$$\vdash \#aS_1b$$
$$\vdash \#S_1$$
$$\vdash \#S_f$$

Mot entrée	Etat courant	Etat de la pile
aaabbb	S_0	#
aabbb	S_0	#a
abbb	S_0	#aa
bbb	S_0	#aaa
bb	S_1	#aa
b	S_1	#a
ε	S_1	# (pile vide)

Exemple 2 :

Pour $\boldsymbol{L_2 = \{a^i b^i \ , i \geq 0\}}$ **,** on ajoute # $S_0 \rightarrow$ # S_f pour reconnaitre le mot vide.

Exemple 3 :

$$\boldsymbol{L_3 = \{w \,/\, |w|_a = |w|_b\}}$$

$\# \, S_0 \, a \rightarrow \# \, a \, S_0$

$\# \, S_0 \, b \rightarrow \# \, b \, S_0$

$a \, S_0 \, a \rightarrow a \, a \, S_0$

$a \, S_0 \, b \rightarrow S_0$

$b \, S_0 \, a \rightarrow S_0$

$b \, S_0 \, b \rightarrow b \, b \, S_0$

$\# \, S_0 \rightarrow \# \, S_f$

Exemple 4 :

$L_4 = \{a^i b^i , i > j \ et \ j \geq 0\}$

$\# S_0 a \rightarrow \# a S_0$

$a S_0 a \rightarrow a a S_0$

$a S_0 b \rightarrow S_1$

$a S_1 b \rightarrow S_1$

$a S_1 \rightarrow S_0$

$a S_1 \rightarrow S_f$

$a S_0 \rightarrow S_f$

Vérification :

$\#S_0aabbb \vdash \#aS_0abbb$

$\vdash \#aaS_0bbb$

$\vdash \#aS_1bb$

$\vdash \#S_1b$ **Bloqué** $\Rightarrow$ **w** $\notin$ **L**$_4$

Définition de configuration

Une configuration de l'AàP A, à un certain instant, est donnée par le contenu de la pile, l'état courant de l'AàP et du mot qui reste à lire

Une configuration est un triplet (y, S_J, w') où :

- y est le mot dans la pile.
- S_J état courant de la pile.
- w' mot qui reste à lire.

Configuration initiale :

$(\#, S_0, w)$

S_0 : l'état initial.

w : le mot à reconnaitre $w \in L(A_p)$

Configuration finale :

(y, S_f, ε)

$S_f \in F$

Mot reconnu par un automate à pile :

Les AàP peuvent reconnaître les langages de deux modes différents, à savoir la reconnaissance par état final et la reconnaissance par pile vide.

w est reconnu par un automate à pile ssi $\#\boldsymbol{S_0 w} \underset{\boldsymbol{A_p}}{\overset{*}{\vdash}} \boldsymbol{yS_f}$

$$L(A_p) = \{w \in X^* \text{ tel que } \#S_0 w \underset{A_p}{\overset{*}{\vdash}} yS_f \text{ , } S_f \in F\}$$

Reconnaissance par pile vide

La notion d'état final dans ce type de reconnaissance n'existe pas, ainsi un AàP qui reconnaît par pile vide est défini par un sextuplé (Σ,Γ,Q,q0,δ,Z0) . ainsi le langage reconnu par pile vide par un automate A est défini par L(A)={ω ∈ X∗/(#,q0,ω) |=∗ (ε,q,ε)}.

Exemple 5 :

$$\boldsymbol{L_5} = \{\boldsymbol{a^i b^i}\ , \boldsymbol{i} < j\}$$

$\# \, S_0 \, a \rightarrow \# \, a \, S_0$

$a \, S_0 \, a \rightarrow a \, a \, S_0$

$a \, S_0 \, b \rightarrow S_1$

$a \, S_1 \, b \rightarrow S_1$

$\# \, S_1 \, b \rightarrow \# \, S_2$

$\# \, S_2 \, b \rightarrow \# \, S_2$

$\# \, S_0 \, b \rightarrow \# \, S_1$

$\# \, S_2 \rightarrow \# \, S_f$

Définition – Automate à pile vide –

- Considérons une configuration finale où la pile serait vide. L'automate à pile est dite de pile vide.

Exemple 6

- $L = \{wcw^R , w \in \{a, b\}^*\}$

$\# S_0 a \rightarrow \# a S_0$
$\# S_0 b \rightarrow \# b S_0$
$a S_0 a \rightarrow a a S_0$
$b S_0 a \rightarrow b a S_0$
$a S_0 b \rightarrow a b S_0$
$b S_0 b \rightarrow b b S_0$
$a S_0 c \rightarrow a S_1$
$b S_0 c \rightarrow b S_1$
$a S_1 a \rightarrow S_1$
$b S_1 b \rightarrow S_1$
$\# S_1 \rightarrow \# S_f$
$\# S_0 c \rightarrow \# S_1$

AàP déterministe et non déterministe

- Il existe deux cas de non déterminisme pour les AàP :

1. Pour le même sommet de pile, même état et le même symbole d'entrée, il existe au moins deux transitions;
2. Pour le même sommet de pile et même état, on a le choix de lire ou ne pas lire du ruban.

Définition

- Un AàP est dit déterministe si et seulement si pour chaque triplé (u, q, a) défini dans $X \times Q \times \Gamma$, la fonction δ associe au plus une paire (α,p), et si $\delta(yi,q,xi)$ est définie, alors il n'existe pas de transition $\delta(yi,q,\varepsilon)$.

- **Remarque** : Il existe des langages algébriques pour lesquels il n'existe pas d'AàP déterministe les reconnaissant.

- **Théorème** : Si un Langage L est reconnu par un automate à pile déterministe, alors il existe une grammaire algébrique non ambiguë générant L.