Chapitre 3
Les Automates d’Etats Finis

Plan

- 1. AEF déterministes
- 2. Représentations d'un automate
- 3. Automates équivalents et complets
- 4. AEF non déterministes (déféminisation)
- 5. Automates et langages réguliers (transformations et propriétés)

Automate d’états finis déterministe

- **Définition**:

un automate d’états finis simple et déterministe est un 5-uplets que l’on note $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ où:

- X : un alphabet,
- S : l’ensemble des états de l’automate,
- $S0$: $\in$ S est l’état initial
- $\mathbb{F}$: $\subseteq$ S l’ensemble des états finaux.
- $\mathbb{I}$: l’ensemble des instructions (transitions) $\mathbb{I}$: $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{S}$ (lecteur de lettre simple)

Principe

- Les éléments de $\mathbb{I}$ sont des triplets que l'on note (Si, xi, Sj) où Si, Sj $\in$ S ; xi $\in$ X.
- i.e. si l'automate est à l'état Si, si sous la tête du lecteur il y a la lettre xi alors l'automate passe à l état Sj.

Représentation de l'ensemble des instructions

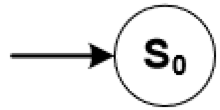
- **Représentation matricielle:**

	x_1	x_2	………	x_i	……..	$x_n \in$ l'alphabet
S_0						
S_1						
…..						
S_i				S_j		
……						
……						
$S_k \in S$						

Représentation de l’ensemble des instructions

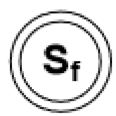
- **Représentation graphique:**

  - Etat initial:

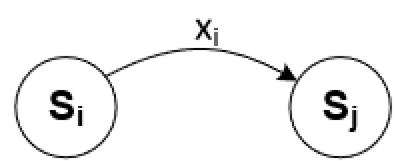


  - Etat simple:

  - Etat final:



  - Une transition: $S_i \underset{\vdash}{\overset{x_i}{}} S_j$



Exemple

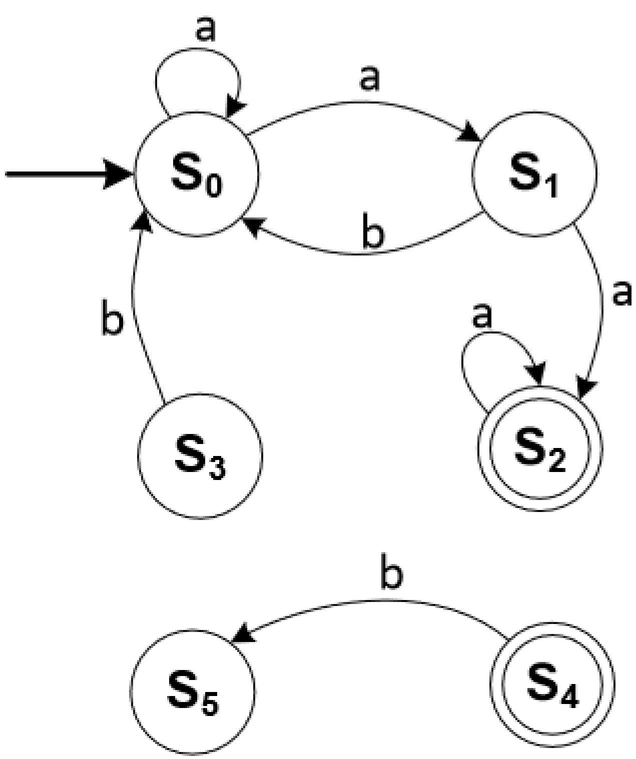
- Soit $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ un automate d'états finis tel que:

- $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$
- $\mathbb{F} = \{S_0, S_2, S_4\}$
- $\mathbb{I} = \{(S_0, a, S_0), (S_0, b, S_1), (S_1, b, S_0),$
  $(S_1, a, S_2), (S_2, a, S_2), (S_3, b, S_0), (S_4, b, S_5), \}$

Exemple

- Représentation matricielle et graphique

	a	b
S_0	S_0	S_1
S_1	S_2	S_0
S_2	S_2	-
S_3	-	S_0
S_4	-	S_5
S_5	-	-

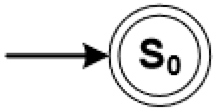


Définition

- Soit $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ un automate d'états finis et soit

$\omega = \omega_1 \, \omega_2 \ldots \, \omega_n$ un mot de X^n où $\omega_i \in X$, on dit que $\omega_1\omega_2\ldots\,\omega_n$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ si et seulement si il existe une séquence d'états de S; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ et il existe $S_f \in \mathbb{F}$ tel que:

- $S_0 \overset{\omega_1}{\vdash} S_1 \overset{\omega_2}{\vdash} S_2 \ldots S_{n-1} \overset{\omega_n}{\vdash} S_n$ (chemin réussi)
- $S_0 \overset{\omega}{\vdash} S_f$

- Un mot est accepté par un automate fini si et seulement si le mot fait passe l'automate de l'état initial à l'état final.
- Si on a l'automate  , ε est accepté par l'automate (c'est le chemin vide).
- Exemple: dans l'exemple précèdent:

  - ω = bab $\in L(\mathcal{A})$?
  - $S_0 \overset{b}{\vdash} S_1 \overset{a}{\vdash} S_2 \overset{b}{\vdash}$ (bloqué $\Rightarrow$ n'est pas reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.

Langage reconnu par un automate fini

$$L(\mathcal{A}) = \left\{\omega \in X^*, \exists\, S_f \in \mathbb{F}\; tq\; S_0 \overset{\omega}{\underset{\vdash}{}} S_f\right\}$$

- Définition: Soit $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ un automate fini. On dit qu'un état Si accessible si et seulement si

$$\exists\, \omega \in X^*\; tq\; S_0 \overset{\omega}{\underset{\vdash}{}} S_i.$$

- Définition: Soit $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ un automate fini. Un état Si co-accessible si et seulement si

$$\exists\, \omega \in X^*, \exists S_f \in \mathbb{F}\; tq\; S_i \overset{\omega}{\underset{\vdash}{}} S_f.$$

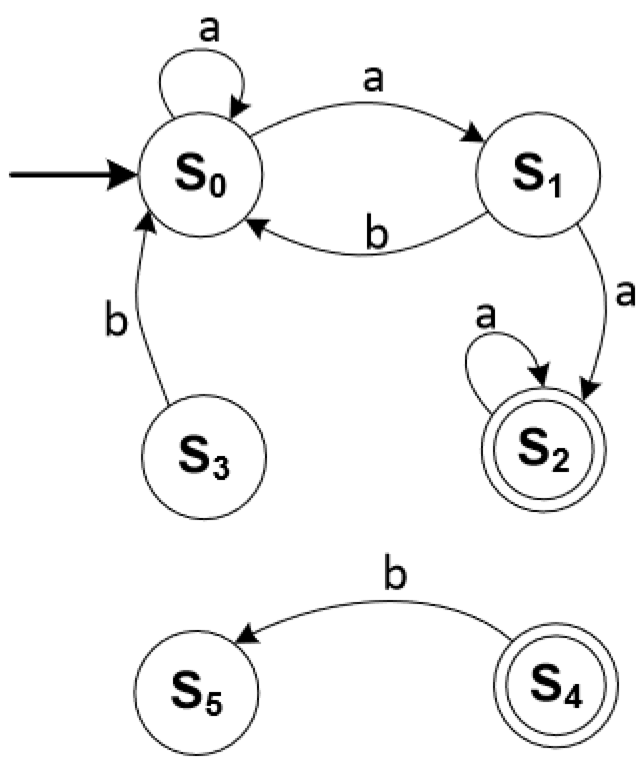
- Proposition:

Soit $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ un automate fini et soit $\mathcal{A}$' l'automate obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en enlevant les états non accessibles et non co-accessibles ainsi que les transitions entrantes et sortantes de ces états. On a L ($\mathcal{A}$)= L ($\mathcal{A}'$)

Exemple

États accessibles	a	b
S_0	S_0	S_1
S_1	S_2	S_0
S_2	S_2	-

États coaccessibles	a	b
S_0	S_0	S_1, S_3
S_2	S_1, S_2	-
S_4	-	-
S_3	-	-
S_1	-	-

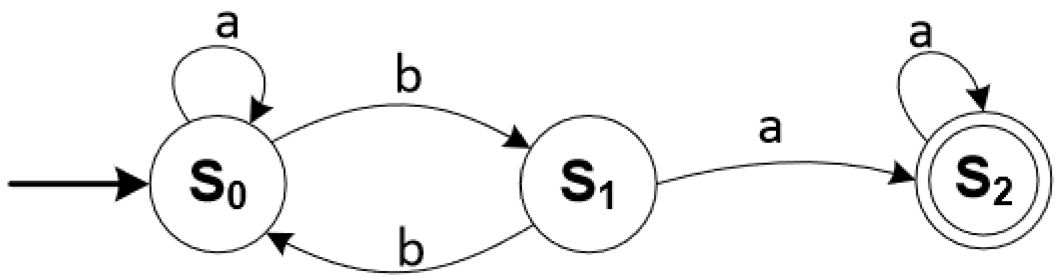


Les états accessibles = $\{S_0, S_1, S_2\}$

Les états co-accessibles = $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$

Suite de l'exemple

$$\mathcal{A}' \leadsto \{S_0, S_1, S_2\}$$



$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

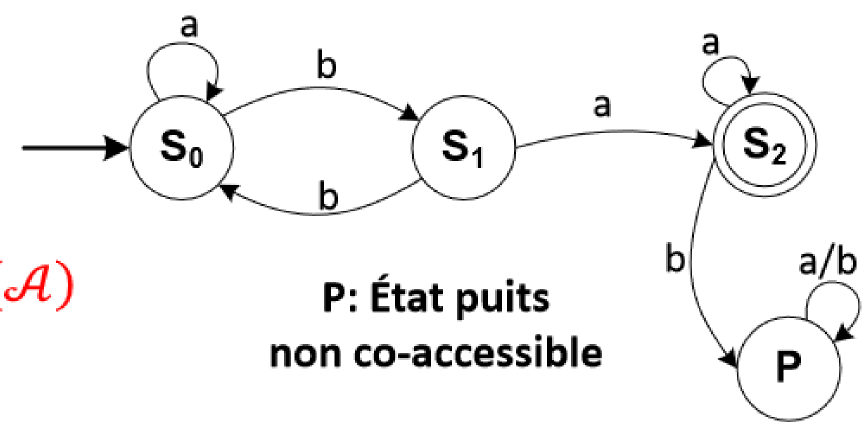
Automate complet

- **Définition**:

On dit qu'un automate fini est complet si et seulement si

baba $\in L(\mathcal{A})$ **?**

$S_0 \xrightarrow{b} S_1 \xrightarrow{a} S_2 \xrightarrow{b} P$ d'où baba $\notin L(\mathcal{A})$



Proposition: à tout automate $\mathcal{A} < X, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ il existe un automate complet équivalent $\mathcal{A}' < X, S', S0', \mathbb{F}', \mathbb{I}' >$

$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$

AEF déterministe (AEFD)

- A est dit déterministe si et seulement si la fonction de transition δ associe à chaque couple (q, a) au plus un état p, avec $a \in X$ et $p, q \in Q$.

Automate déterministe

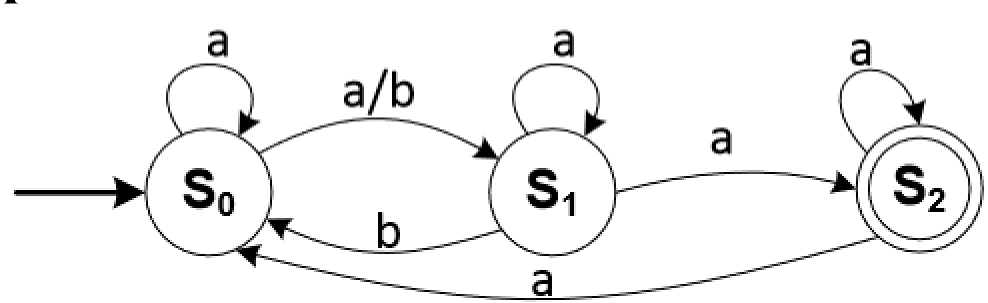
$\mathbb{I}: S \times X \to S$

1) $\forall\, S_i, S_j, S_k \in S, x_i \in X$

$$\textbf{Si } S_i \xrightarrow{x_i} S_j \text{ et } S_i \xrightarrow{x_i} S_k \textbf{ alors } S_j = S_k$$

2) L'état initial unique

- **Exemple**



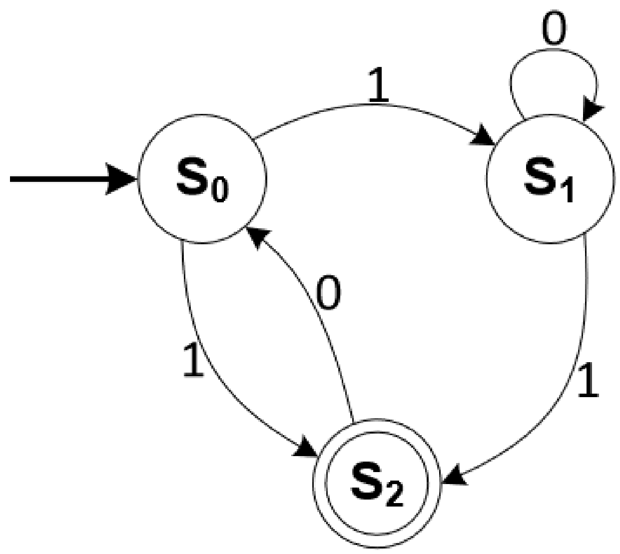
Automate non déterministe

- $\omega = aaba \in L\ (\mathcal{A})$? (dans l'exemple précédent)

1) $S_0 \xrightarrow{a} S_1 \xrightarrow{a} S_1 \xrightarrow{b} S_0 \xrightarrow{a} S_0 \notin \mathbb{F}$
2) $S_0 \xrightarrow{a} S_1 \xrightarrow{a} S_1 \xrightarrow{b} S_0 \xrightarrow{a} S_1 \notin \mathbb{F}$
3) ……………………………………………
4) $S_0 \xrightarrow{a} S_0 \xrightarrow{a} S_0 \xrightarrow{b} S_1 \xrightarrow{a} S_2 \in \mathbb{F}$

- Proposition: à toute automate non déterministe $\mathcal{A} < X, S, S$ $0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$ il existe un automate déterministe équivalent $\mathcal{A}'$ tel que L($\mathcal{A}$)=L($\mathcal{A}'$)

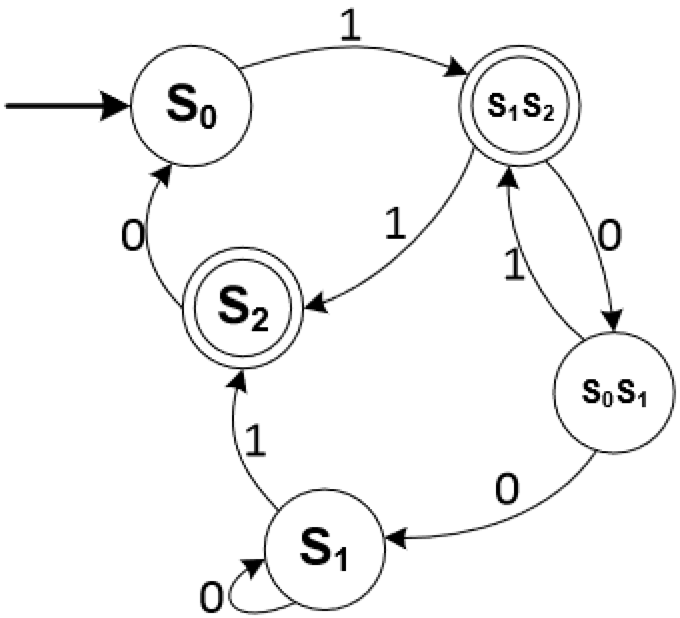
Exemple



- $\omega = 1011 \in L\,(\mathcal{A})$?
- Il suffit de trouver un chemin réussi qui passe ce mot

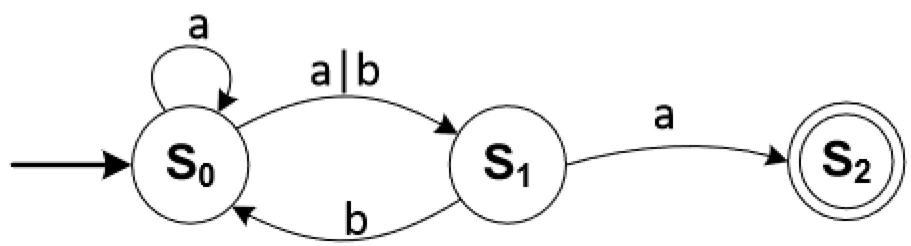
Rendre un automate déterministe

	0	**1**
$\rightarrow \mathbf{S_0}$	-	S_1S_2
# $\mathbf{S_1S_2}$	S_0S_1	S_2
$\mathbf{S_0S_1}$	S_1	S_1S_2
# $\mathbf{S_2}$	S_0	-
$\mathbf{S_1}$	S_1	S_2

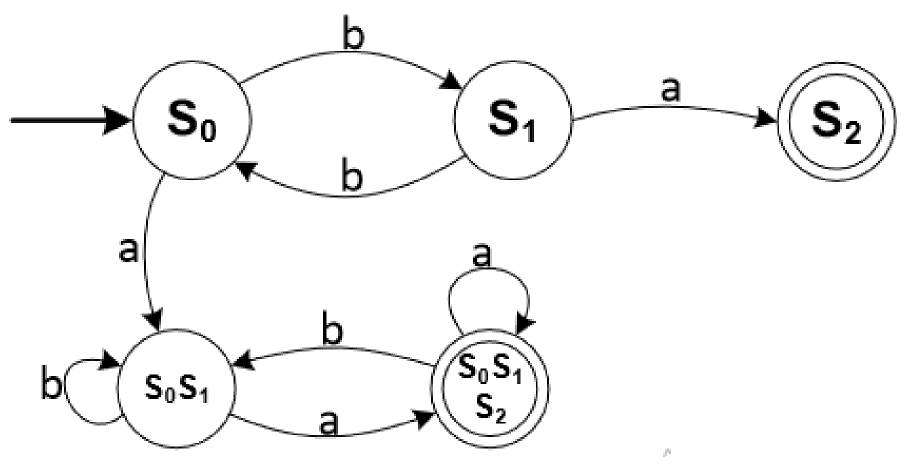


Exemple

- Rendre l'automate $\mathcal{A}$ déterministe puis complet.

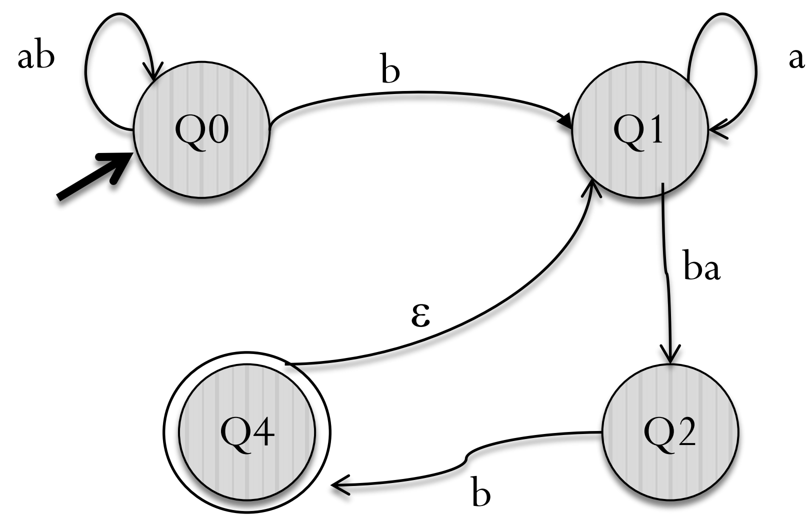


	a	b
$\rightarrow S_0$	S_0S_1	S_1
S_0S_1	$S_0S_1S_2$	S_0S_1
S_1	S_2	S_0
# $S_0S_1S_2$	$S_0S_1S_2$	S_0S_1
# S_2	-	-



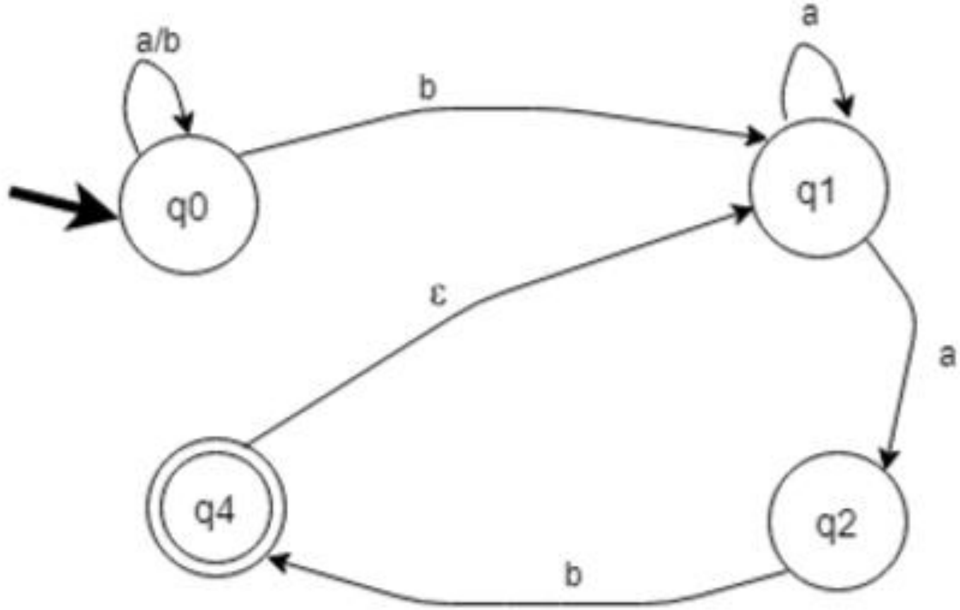
Les automates généralisés

- Dans un AEF généralisé les transitions (étiquettes) peuvent être engendrées par des mots. Les transitions causée par le mot ε sont appelées des transitions spontanées (ε-transitions), il s'agit d'un changement d'états sans lecture.



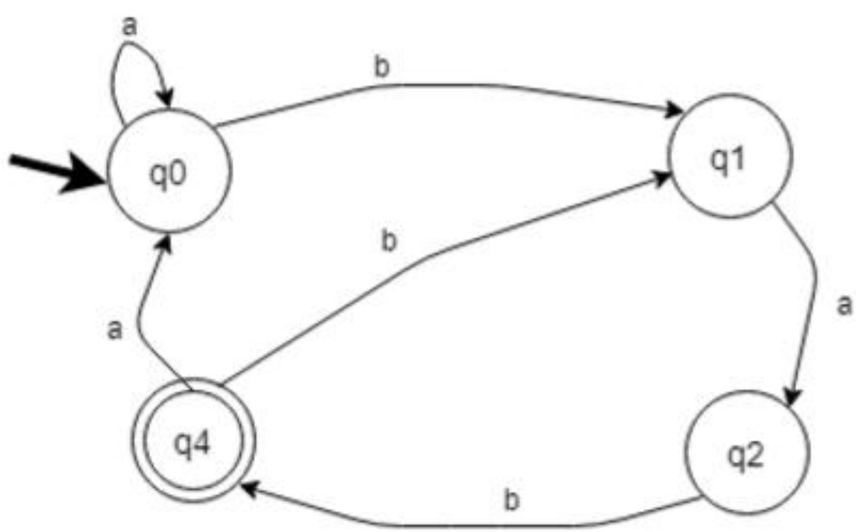
Automate partiellement généralisé (AEF PG)

- Dans un AEF partiellement généralisé les transitions (étiquettes) sont générées par un seul symbole de l'alphabet ou par ε.



Les automates simples (AEFS)

- Dans un AEF simple les transitions (étiquettes) sont toujours générées par un et un seul symbole de l'alphabet.



Les automates généralisés

- Définition:

Un automate généralisé est un 5-uplet $\mathcal{A}G < X^*, S, S0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$,
$\mathbb{I} \subseteq S \times X^* \times S$.

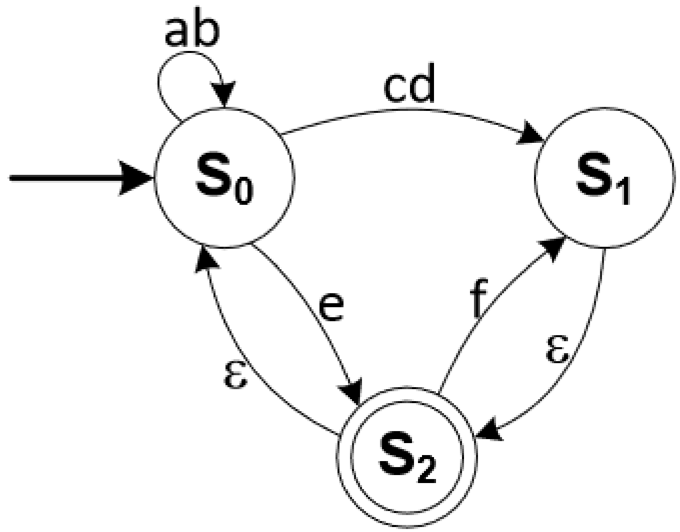
- Les transitions dans un automate généralisé sont trois types:

– Les transitions causées par des lettres de X.

– Les transitions causées par des mots de long>1.

– Les transitions causées par le mot vide (transition spontanée).

Exemple



- $\omega = \text{abcd} \in L(\mathcal{A})?$
- $S_0 \xrightarrow{\text{ab}} S_0 \xrightarrow{\text{cd}} S_1 \xrightarrow{\epsilon} S_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow S_0 \xrightarrow{\text{abcd}} S_2 \Rightarrow \text{abcd} \in L(\mathcal{A})$

Les AEFs généralisés

- Théorème : Pour chaque AEF généralisé généralisé $\mathcal{A}_G < X, S, S_0, \mathbb{F}, \mathbb{I} >$, il existe un AEF simple et déterministe $\mathcal{A}_S < X, SS, S_0S, \mathbb{F}S, \mathbb{I}S >$ qui reconnaît le même langage.

Construction de l'automate partiellement généralisé

- **Élimination des mots contenant au moins deux lettres**:

Pour chaque transition avec un mot ω, tel-que $|\omega| = n$, avec $n \geq 2$, créer n-1 états supplémentaires et rajouter les transitions qui relient ces états avec les lettres de ω, à la fin de cette étape on obtient un AEF partiellement généralisé

Construction de l'automate partiellement généralisé

Construction de l'automate partiellement généralisé:

- $\mathcal{A}_{PG} < X \cup \{\epsilon\}, S', S0', \mathbb{F}, \mathbb{I}' >$
- A l'initialisation $\mathbb{I}' =$ $S' = S$

Pour chaque instruction de $\mathbb{I}$ (S_i, x, S_j) $x \in X*$

- Si |x| =0 ou |x|=1 alors $\left(S_i, x, S_j\right) \in \mathbb{I}'$
- Si |x|>1 alors $(x = x_1 x_2 \ldots x_n, x_i \in X)$

Ajouter à $\mathbb{I}'$: (S_i, x_1, S_{I1})

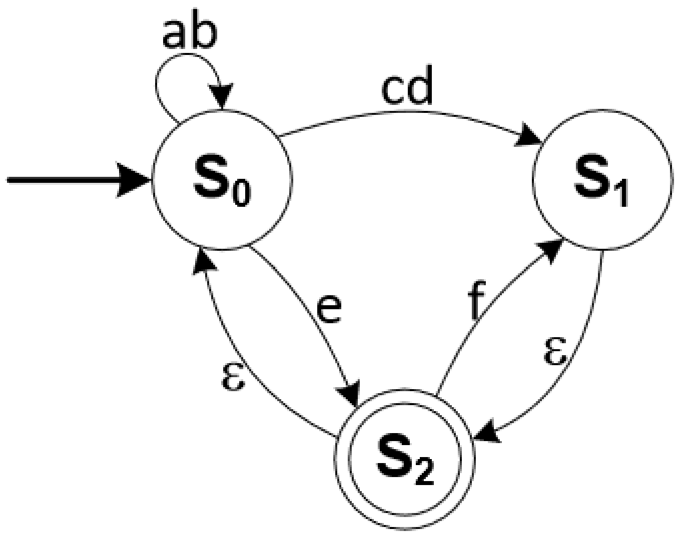
(S_{I1}, x_2, S_{I2})

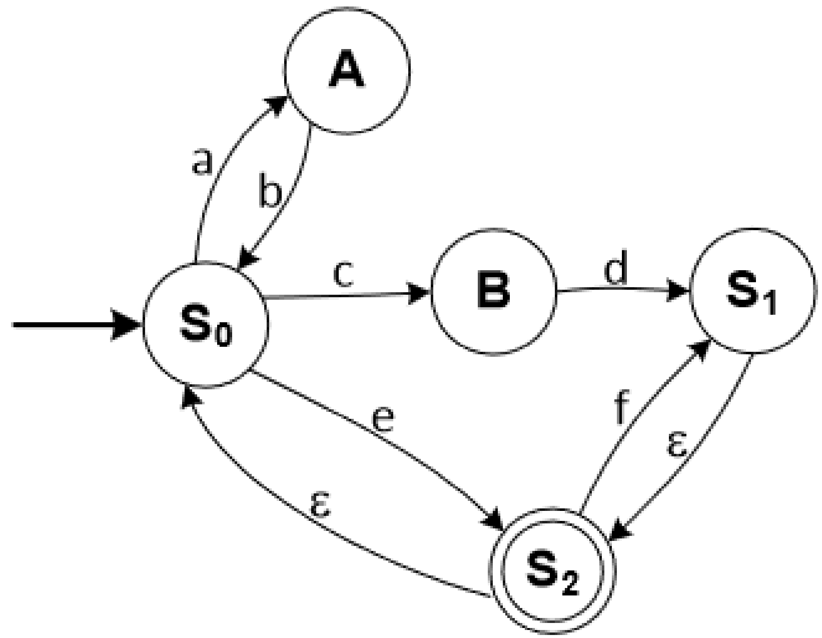
……

$\left(S_{I_{n-1}}, x_n, S_j\right)$

On ajoute (n-1) états intermédiaires S_{I1}, S_{I2},…, $S_{I_{n-1}}$ à S' $\Rightarrow$
$S' = S \cup \{S_{I1}, S_{I2},…, S_{I_{n-1}}\}$

Construction de l'automate partiellement généralisé



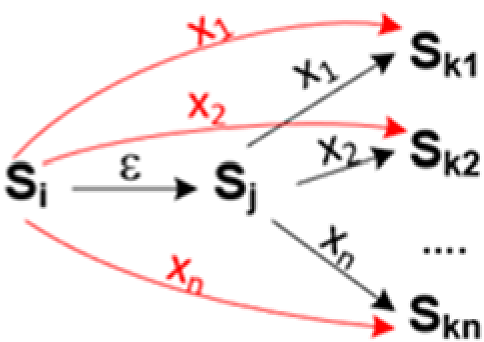


Construction de l'automate simple

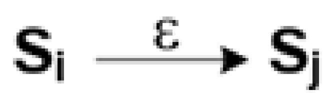
- **Élimination des ε-transitions:**

La suppression des ces transitions nous donne un AEF simple, pour ce faire il faut d'abord enlever les transitions par ε

Règle 1:

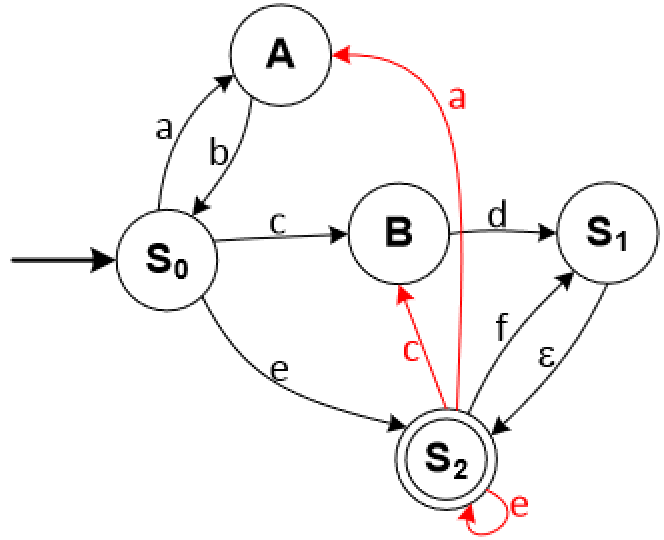


Règle 2:



Si $S_j \in \mathbb{F}$ alors S_i devienne un état final.

- **<u>Elimination du 1ière transition spontanée:</u>**



- **<u>Elimination de la 2ième transition spontanée:</u>**