Chapitre 5

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes

1.Généralités sur les matrices :

1.1.Définition:

Une matrice d'éléments de IR est un tableau à deux dimensions composé de m lignes et n colonnes. L'ensemble des matrices de IR de dimension m, n est noté $\mathrm{M}_{m,n}$ et forme un espace vectoriel sur IR

1.2.Propriétés :

Soient A et B deux matrices :

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}\ 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$
- $\alpha A = [\alpha x_{ij}]_{m,n}$
- On appelle transposé de A la matrice A^t telle que :
  $[A^t]_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$
- Soients $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}$et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n,p}}$ alors le produit $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,p}}$ set donné par la formule suivante. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\ 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$
- $AB \neq BA$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- On dit qu' une matrice $A \in M_{n,n}$et seulement si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

- Une matrice A est dite symétrique si $A^t = A$ (autrement dit si $a_{i\,j} = a_{j\,i}$) et antisymétrique si $A^t = -A$

- On dit que A est orthogonale si : $A^{-1} = A^t$.
- Une matrice L est dite triangulaire inférieure si $a_{i\,j} = 0$ pour $j > i$
- Une matrice U est dite triangulaire supérieure si $a_{i\,j} = 0$ pour $i > j$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\; a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

On appelle système de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$, la famille d'équations.

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots\vdots \end{cases}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots.. + a_{mn}x_n = b_m$$

Que l'on peut mettre sous la forme $A\,X = B$

Où: $A \in M_{mn}(IR)$ est une matrice donnée par ses éléments $(a_{i\,j})$

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ et X le vecteur inconnu de composantes $(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$

1.3.Définition:

Une méthode de résolution est dite directe si on arrive à la solution du problème après un nombre fini d'opérations arithmétiques.

2. Méthode de Gauss :

La méthode de gauss consiste à transformer le système AX=b à un système triangulaire équivalent à l'aide d'un algorithme d'élimination.

Remarque :

Les transformations suivantes appliquées à un système linéaire donnent un système linéaire équivalent :

- Une équation peut être remplacée par cette même équation à la quelle en ajoute ou on retranche un certains nombre de fois une autre ligne.
- La multiplication d'une équation par un constant non nulle.
- La permutation de deux lignes ou deux colonnes.

(1) est écrit sous la forme $A^{(1)}X = B^{(1)} \dots\dots\dots .(2)$

Avec :$A^{(1)} = \left(aij^{(1)}\right) = A$, $B^{(1)} = b_j^{(1)} = B$

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & & & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & & \dots\dots\dots & a_{n\,n} & \vdots & b_n \end{pmatrix}$$

C.à.d. on regroupe A et b dans une seule matrice.

2.1.Résolution d'un système triangulaire supérieure :

Si le système AX=b est triangulaire supérieure, il a la forme suivante

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2\,n}\,x_n = b_2 \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{n\,n}\;\; x_n = b_n \end{cases}$$

2.2.Théorème :

Soit le système triangulaire AX=b où $A \in M_{mn}(IR)$est une matrice carrée et $B \in IR^n$, si $a_{k\,k} \neq 0 \forall\, k\ \in [1, n]$.

Alors le système AX = b admet une solution unique et cette solution.

x est donnée par la formule suivante

$$\boldsymbol{x_i = \frac{1}{a_{i\,i}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i\,j}x_j\right] \quad i = \overline{n, 1}}$$

Si la matrice A est triangulaire inférieur le système A x=b s'écrit comme suivant :

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = \overline{1,n}$$

$$a_{ij} = 0 \qquad si\, j > i$$

Alors : $x_i = \frac{1}{a_{i\,i}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i\,j}x_j\right]\ i = \overline{1,n}$

2.3. Etapes de la méthode de Gauss

Soit A une matrice d'ordre n régulière

Principe : transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure.

Pour cela on construit $[A: b]$et

$[A: b] \xrightarrow{\text{tran aformation}} \left[A^{(n)}: b^{(n)}\right]\ Ou\ A^{(n)}$est une matrice triangulaire supérieure.

$$c - \text{à} - d: [A: b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1\,n}^{(1)} & . & b_1^{(1)} \\ \vdots & \dots & . & . & . \\ & \dots & . & . & . \\ a_{n\,1}^{(1)} & \dots & a_{n\,n}^{(1)} & . & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\left[A^{(n)}: b^{(n)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} & . & b_1^{(n)} \\ 0 & \dots & . & . & \vdots \\ 0 & \dots & . & . & \\ 0 & \dots & a_{n\,n}^{(n)} & . & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Puis. On résout le système $A^{(n)}. x = b^{(n)}$dont x est la solution exacte du système A.x=b.

On procède de la manière suivante :

Etape1 : On pose $A = A^{(1)}\ \ et\ b = b^{(1)}$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait les opérations suivantes :

L₁est maintenue$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$

On obtient alors :

$$[A^{(2)}: b^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n\,2}^{(2)} & \cdots \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Et ainsi de suite :

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{cases}$$

Résolution de $A^{(n)}.x = b^{(n)}$

$$A.x = b \Leftrightarrow A^{(n)}.x = b^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + \cdots = b_1^n \\ \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^n \end{cases}$$

On commence par déterminer x_n puis x_{n-1}...(résolution par retour en arrière).

Exemple :

Trouver la solution du système suivant par la méthode de gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 1 :élimination de x_1

$L_2^{(2)} \longrightarrow L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$

$L_3^{(2)} \longrightarrow L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$

$$\mathrm{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 2 : élimination de x_2 :

$$L_3^{(3)} \longrightarrow L_3^{(2)} - \left(\frac{-7}{-4}\right) L_2^{(2)}$$

$$\mathrm{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

On remplace inversement on obtient

$$\frac{15}{2} x_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-4\, x_2 - 6x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Méthode de Cholesky :

3.1.Définition :

Une matrice est dite définie positive si et seulement si pour tout

$$x \in IR^n \neq 0 : \ x^t A x > 0$$

Condition suffisante pour que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{34} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Soit définie positive est : si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs

(det $A_{(k)_{1\leq k\leq n}} > 0$)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$………..

$\det A > 0$

3.2.Proposition :

Une matrice A symétrique, définie positive si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inférieure inversible telle que $A = L\, L^t$

3.3.Algorithme :

Soit A une matrice symétrique, définie positive pour résoudre le système $Ax = b$ il faut résoudre :

$$\begin{cases} Ly = B \\ L^t x = y \end{cases}$$

Construire la matrice $L = (l_{i\,j})$triangulaire inferieure telle que $A = L\, L^t$ où $A = (a_{\,ij})$.

$$a_{\,ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{i\,k}\,\ell_{j\,k} \qquad j \leq i$$

Donc : $a_{11} = \ell_{11}^{\,2} \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$ et $a_{i1} = \ell_{i1}\ell_{11} \Rightarrow \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}}\overline{i = 2, n}$

La construction de la matrice L se fait colonne par colonne

$$\ell_{k\,k} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{\ell-1} \ell_{k\,j}^{2}}$$

Et : $a_{i\,k} = \sum_{j=1}^{k} \ell_{i\,j}\ell_{k\,j} = \ell_{i\,k}\ell_{k\,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{i\,j}\,\ell_{k\,j}$

Donc : $\ell_{i\,k} = a_{i\,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{i\,j}\,\ell_{k\,j})/\ell_{k\,k}$

Exemple 1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$x^t A\, x = (x_1, x_2).\begin{pmatrix} x_1 + & 2x_2 \\ 2x_1 + & 8x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4{x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \; x = 0$

Alors A est définie positive.

Exemple 2 :

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$

Et le vecteur $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

Condition de convergence (méthode de Colesky) ⇒A symétrique définie positive.

- A est symétrique

- Est-ce- que A est définie positive

$\Delta_1 = 9 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 > 0$

Δ_3

$= \det A = 9\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & 42 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 9(161) - 3(21) + 15(54)$

$= 1449 - 63 - 810 = 576 > 0$

$$A = L\,L^t = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & {\ell_{21}}^2 + {\ell_{22}}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{bmatrix}$$

La 1$^{\text{ère}}$ colonne :

$\ell_{11}^2 = 9 \Rightarrow \ell_{11} = 3$

$\ell_{21}\ell_{11} = 3 \Rightarrow \ell_{21} = 1$

$\ell_{31}\ell_{11} = 15 \Rightarrow \ell_{31} = 5$

La 2$^{\text{ème}}$ colonne :

$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 5 \Rightarrow \ell_{22} = 2$

$\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 7 \Rightarrow \ell_{32} = 1$

La 3$^{\text{ème}}$ colonne :

$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 42 \quad \ell_{33} = 4$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$LY = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} LY = b \\ L^t x = y \end{cases} L^t x = y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Remarque :

On $a\ A_k = L_k L_k^{\ t}$ ou L_k sont les matrice composées des k premières lignes et k premières colonnes de A et de L

det $A_k = (l_{11}\ .\ l_{22}.\ l_{33} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots l_{kk})^2 = l_{11}^2.\ l_{22}^2.\ l_{33}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots..\ l_{kk}^2$>0 est symétrique définie positive).

- La méthode de Colesky permet de calculer det A par :det $A = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii}^2$.

4. Méthode de Crout-Dolitle ou LU

Cette méthode consiste à factoriser la matrice **A** pleine en deux matrices triangulaires ***L*** et ***U***, tel que ***L*** est triangulaire inférieure et ***U*** est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité (uii = 1).

On a donc AX=b et A=LU donc LUX=b, on pose UX=Y (Y vecteur inconnu), cela donne :

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$$

Le système AX=b est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre. Le système à matrice triangulaire supérieure et résolue par substitution directe, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution inverse.

2.3.1 Détermination des matrices L et U

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} 1\ u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$l_{ki} = \mathrm{a}_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj}\, u_{ji}$

Avec :*i=2,3,……….,n* et *k=i,i+*1*,………,n*

$$u_{ik} = \frac{\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{jk}\right)}{l_{ii}}$$

Exemple :

Soit A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

On applique l'algorithme de Crout et Doolittle pour résoudre le système AX=b.

On cherche L= $\begin{bmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$ et U= $\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tel que A=LU

-On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On identifie la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On identifie la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On identifie la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

-On identifie la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Puis on remplace dans

$\begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$ on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$