Centre Universitaire de Mila
Département de ST

2019/2020
Licence S4

Mathématique 4
TD 03

Exercice 1. Calculer $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ dans les cas suivants :

1. $f(z) = \|z\|^2, \qquad \gamma : \|z\| = 1.$
2. $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z^2), \qquad \gamma : \|z\| = 1.$
3. $f(z) = \dfrac{\mathrm{Ln}\, z}{z}, \qquad \gamma : [i, ie].$
4. $f(z) = x + y + i3x^2, \qquad \gamma : [0, 1+i].$

Exercice 2. Démontrer que si $\gamma : \|z - a\| = r$:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & si \;\; n \neq 1 \\ 2\pi i & si \;\; n = 1 \end{cases}.$$

Exercice 3.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{\pm 1\}$, et $\gamma : \|z\| = 1$, calculer :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-a^{-1})}.$$

2. Montrer que :

$$\forall a \in]0,1[, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z; \qquad \gamma : 4x^2 + y^2 - 2y = 0.$
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z \;\sin(z-1)}{z^2 - z}\,\mathrm{d}z; \qquad \gamma : \|z\| = 2.$
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(\pi z/4)}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z; \qquad \gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0.$

Solutions

Exercice 1. Calculer l'intégrale de f sur γ (remplacer z par $\gamma(t)$ et $\mathrm{d}z$ par $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$).

1. $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.
2. $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.
3. Utiliser la fait que f holomorphe sue γ.
4. Sur la segment $[0, 1+i]$ on a $y = x$ et $\gamma(t) = (1+i)t, t \in [0, 1]$

Exercice 2. $\gamma(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3.

1. Il y a deux cas
   - a) $0 < |a| < 1$, la fonction $\frac{1}{z-a^{-1}}$ est holomorphe sur γ, utiliser formule intégrale de Cauchy sur γ.
   - b) $1 < |a|$, la fonction $\frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur γ, utiliser formule intégrale de Cauchy sur γ.
2. Sur γ on a $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Calculer l'intégrale sur γ et comparer l'intégrale obtenue avec (a).

Exercice 4.

1. γ est un ellipse. Tracer γ et utiliser la formule intégrale de Cauchy.
2. γ est le cercle de centre 1 et rayon 2, de plus γ est multiconnexe avec $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$ sont les deux à l'intérieur de γ. Par la formule intégrale de Cauchy.
3. γ un cercle. Utiliser la formule intégrale de Cauchy.