Exercice n°1

Montrer que la condition aux limites générale

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}+q_a=h(T-T_\infty)+\varepsilon\sigma\left(T^4-T_r^4\right)$$

Pour $\frac{T-T_r}{T_r}\prec\prec 1$ peut être linéariser et écrite sous la forme

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}+q_a=h(T-T_\infty)+h_r(T-T_r)$$

où $h_r=4\varepsilon\sigma T_r^3$ est le coefficient de transfert par rayonnement.

Solution

Dans le cas où $\frac{(|T-T_r|)}{T_r}\prec\prec 1$, il est possible de linéariser l'équation $-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}+q_a=h(T-T_\infty)+\varepsilon\sigma\left(T^4-T_r^4\right)$, en effet posons

$$\frac{T-T_r}{T_r}=\alpha \qquad (\ \alpha\prec\prec 1)$$

d'où

$$T=(\alpha+1)T_r$$

Le terme $T^4-T_r^4$ peut s'écrire sous la forme

$$T^4-T_r^4=(T-T_r)\left(T^3+TT_r^2+T^2T_r+T_r^3\right)$$

en remplaçant T par son expression, nous obtenons

$$T^4-T_r^4=(T-T_r)\left(\alpha^3+4\alpha^2+6\alpha+4\right)T_r^3$$

comme α est très petit devant l'unité, nous obtenons

$$T^4-T_r^4=4T_r^3(T-T_r)$$

par conséquent, l'équation devient

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}+q_a=h(T-T_\infty)+h_r(T-T_r)$$

où h_r est le coefficient d'échange par rayonnement donné par la relation

$$h_r=4\varepsilon\sigma T_r^3$$

Exercice n°2

1) Si la surface est noire à la température $T=505\,K$, et si la température de référence est $T_r=500\,K$, calculer le coefficient d'échange pour le rayonnement h_r.
2) Calculer le flux de chaleur par rayonnement q_{ray} avec et sans linéarisation.

Donnée : $\sigma=5{,}67\times10^{-8}\ W/m^2K^4$.

Solution

1) Calcul du coefficient h_r

$$h_r=4\varepsilon\sigma T_r^3=4\times1\times5{,}67\times10^{-8}\times500^3=28{,}35\,W/m^2K$$

2) Calcul du flux de chaleur par rayonnement
   a) Avec linéarisation

$$q_{ray} = h_r(T - T_r) = 28{,}35 \times (505 - 500) = 141{,}75\, W/m^2$$

b) Sans linéarisation

$$q_{ray} = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_r^4\right) = 1 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times \left(505^4 - 500^4\right) = 143{,}89\, W/m^2$$

ainsi, l'erreur commise est de l'ordre de

$$\frac{\Delta q(sans\, linéa - avec\, linéa)}{q(sans\, linéa)} = \frac{143{,}89 - 141{,}75}{143{,}89} = 1{,}48\%$$

Exercice n°3

Trouver l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes pour un milieu anisotrope.

Solution

Les flux de chaleur sont

$$q_x(\vec{r},t) = -\lambda_{11}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial x} - \lambda_{12}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial y} - \lambda_{13}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial z}$$

$$q_y(\vec{r},t) = -\lambda_{21}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial x} - \lambda_{22}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial y} - \lambda_{23}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial z}$$

$$q_z(\vec{r},t) = -\lambda_{31}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial x} - \lambda_{32}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial y} - \lambda_{33}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial z}$$

en substituant ces relations dans l'équation de la chaleur

$$\rho C_P\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\bullet\vec{q} + g(\vec{r},t)$$

ou

$$\rho C_P\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x(\vec{r},t)}{\partial x} - \frac{\partial q_y(\vec{r},t)}{\partial y} - \frac{\partial q_z(\vec{r},t)}{\partial z} + g(\vec{r},t)$$

nous obtenons l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes dans un milieu anisotrope

$$\rho C_P\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \lambda_{11}\frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \lambda_{22}\frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \lambda_{33}\frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial z^2} + (\lambda_{12}+\lambda_{21})\frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial x\partial y}$$

$$+ (\lambda_{13}+\lambda_{31})\frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial x\partial z} + +(\lambda_{23}+\lambda_{32})\frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial y\partial z} + g(\vec{r},t)$$

Exercice n°4

Le tenseur de conductivité thermique d'un solide anisotrope est donné par la matrice

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

a) Ecrire les expressions des flux de chaleur q_x , q_y et q_z selon les directions (Ox, Oy, Oz),

b) Déduire l'équation de la chaleur.

Solution

Dans un solide anisotrope les composantes du vecteur flux de chaleur s'écrivent

$$\begin{pmatrix} -q_x \\ -q_y \\ -q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

soient

$$q_x(\vec{r},t) = -\alpha_1 \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial x} - \beta \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial y}$$

$$q_y(\vec{r},t) = -\beta \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial y}$$

$$q_z(\vec{r},t) = -\alpha_3 \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial z}$$

en substituant ces relations dans l'équation de la chaleur

$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \bullet \vec{q} + g(\vec{r},t)$$

nous obtenons, dans ce cas, l'équation de la chaleur suivante

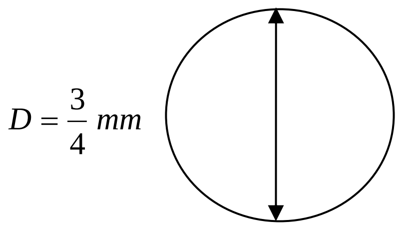
$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial z^2} + 2\beta \frac{\partial^2 T(\vec{r},t)}{\partial x \partial y} + g(\vec{r},t)$$

Exercice n°5

La température d'un courant gazeux doit être mesurée par un thermocouple. La jonction du thermocouple peut être assimilée à une sphère de diamètre $D = \frac{3}{4}\,mm$, de conductivité thermique $\lambda = 30\,W/m°C$, de masse volumique $\rho = 8400\,kg/m^3$ et de capacité calorifique $C_P = 0{,}4\,kJ/kg°C$. Si le coefficient d'échange entre le courant gazeux et le thermocouple est $h = 600\,W/m^2°C$, combien de temps mettra le thermocouple pour enregistrer 99% de la différence de température entre la température du gaz et la température initiale du thermocouple.

Solution

En admettant que la tête du thermocouple est une sphère



la longueur caractéristique du système est

$$L_c = \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{D}{6} = \frac{\left(\frac{3}{4}\times 10^{-3}\right)}{6} = 0{,}00075\,m$$

L'évolution de la température dans le temps est donnée par la formule

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hS}{\rho CV}} = e^{-\frac{h}{\rho C L_c}}$$

le terme

$$\frac{h}{\rho C_P L_C} = \frac{600}{8400\times 400\times 0{,}00075} = 0{,}158\,s^{-1}$$

Pour lire $0{,}99$ de la température initiale, nous devons avoir

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0{,}01$$

$$0{,}01 = e^{-0{,}158\,t}$$

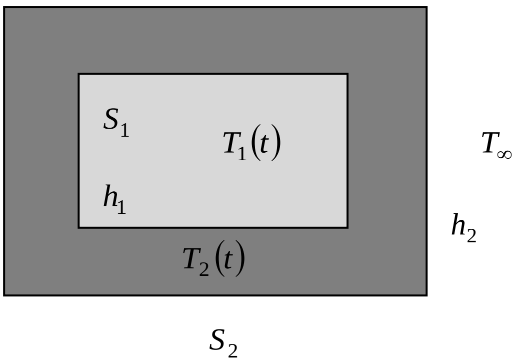
d'où

$$t = \frac{\ln(0{,}01)}{-0{,}158} = 29{,}14\,s$$

Ainsi, il faudra attendre 29,14 secondes pour que le thermocouple enregistre 99% de la différence de température entre la température du gaz et la température initiale du thermocouple.

Exercice n°6

Un récipient de surface interne S_1 et de surface externe S_2 contient un fluide à la température T_0. La température de l'air ambiant est constante et égale à T_∞.Si on suppose que les coefficients d'échange convectif interne et externe sont h_1 et h_2, calculer les températures du récipient et du fluide en fonction du temps $T_1(t)$ et $T_2(t)$.



Solution

Pour trouver les évolutions des températures du fluide et du récipient, il est indispensable d'écrire un bilan d'énergie.

Pour le fluide

$$(-\rho CV)_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = h_1 S_1 (T_1(t) - T_1(t))$$

Pour le récipient

$$(-\rho CV)_2 \frac{dT_2(t)}{dt} = h_2 S_2 (T_2(t) - T_\infty) - h_1 S_1 (T_1(t) - T_2(t))$$

avec les conditions aux limites

$$t = 0, T_1(0) = T_2(0) = T_0$$

$$t = 0, \frac{dT_1(0)}{dt} = \frac{dT_2(0)}{dt} = 0$$

en posant que

$$K_1 = \frac{h_1 S_1}{\rho_1 C_1 V_1}, K_2 = \frac{h_1 S_1}{\rho_2 C_2 V_2}, K_1 = \frac{h_2 S_2}{\rho_2 C_2 V_2}$$

et avec les opérateurs $D = \frac{d}{dt}, D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$, nous obtenons

$$(D + K_1)T_1(t) - K_1 T_2(t) = 0$$

$$-K_2 T_1(t) + (D + K_2 + K_3)T_2(t) = K_3 T_\infty$$

en éliminant la température $T_2(t)$ entre ces deux équations, nous obtenons pour $T_1(t)$, l'équation différentielle

$$\left(D^2 + (K_1 + K_2 + K_3)D + K_1 K_3\right)T_1(t) = K_1 K_3 T_\infty$$

dont la solution est

$$T_1(t) = T_\infty + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

où

$$r_1 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) + \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1 K_3}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) - \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1 K_3}}{2}$$

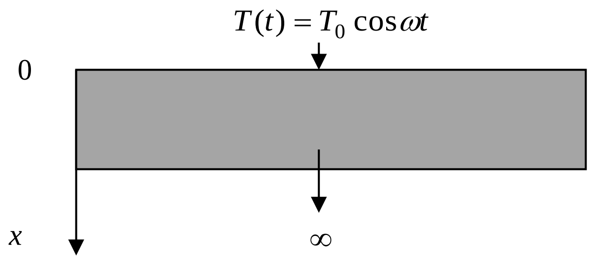
en calculant les constantes A et B, à partir des conditions aux limites, nous trouvons

$$\frac{T_1(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}$$

La température $T_2(t)$ est obtenue à partir de l'une des équations en y substituant l'expression de la température $T_1(t)$.

Exercice n°7

Sachant que la variation journalière de température à la surface du sol est $T(t) = T_0 \cos\omega t$,



et nous nous proposons de calculer la température du sol $T(x,t)$, pour cela, nous devons résoudre l'équation de Fourier

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

a) Ecrire les conditions aux limites adéquates,

b) Montrer que $(i\omega)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i)$,

c) Chercher la solution sous la forme : $T(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$,

d) En prenant la partie réelle de la solution calculer la constante d'intégration.

e) Quelles conclusions peut-on tirer de cette solution.

<u>Solution</u>

a) Les conditions aux limites pour ce problème sont

$$x = 0;\ T(0;t) = T_0 \cos\omega t$$
$$x = \infty;\ T(x;t) = Finie$$

b) Ecrivons $(i\omega)^{\frac{1}{2}}$ sous la forme

$$(i\omega)^{\frac{1}{2}} = a + ib$$

soit

$$i\omega = a^2 - b^2 + 2iab$$

d'où

$$a = b = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

par conséquent $(i\omega)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}$

c) En injectant la forme de la solution $T(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$ dans l'équation de Fourier, nous obtenons

$$\frac{i\omega}{a} X(x)e^{i\omega t} = X''(x)e^{i\omega t}$$

soit

$$X''(x) - \frac{i\omega}{a} X(x) = 0$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire est

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} + Be^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}}$$

d'où l'expression de la température

$$T(x,t) = \left(Ae^{x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} + Be^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \right) e^{i\omega t}$$

Mais comme la température doit être finie pour $x = \infty$, la constante A doit être nulle, d'où

$$T(x,t) = Be^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} e^{i\omega t} = Be^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{-xi\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{i\omega t} = Be^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{i\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)}$$

d) La partie réelle de cette solution est

$$T(x,t) = Be^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$

à partir de la première condition aux limites, nous avons

$$T(0,t) = B\cos\omega t = T_0 \cos\omega t$$

$$B = T_0$$

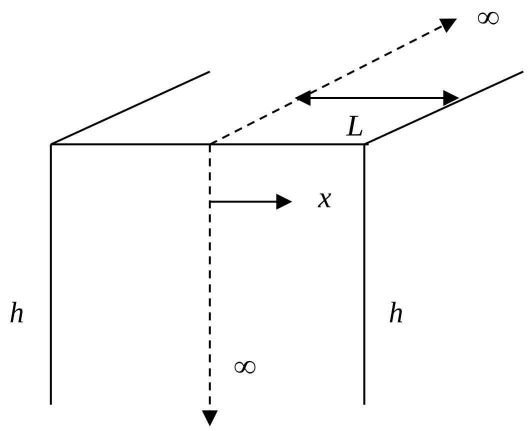
ainsi

$$T(x,t) = T_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$

e) En conclusion, la température du sol a une amplitude qui est amortie par le facteur $e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$ et elle est déphasé par rapport à la température $T(t) = T_0 \cos\omega t$ d'un angle égal à $x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$.

Exercice n°8

Résoudre l'équation de Fourier dans ce cas sachant que $T(x,0) = T_0$.



Solution

La température dans ce solide est solution de l'équation de Fourier

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

sujette aux conditions aux limites suivantes

a) $T(x,0)=T_i$ (Condition initiale)

b) $\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0$ (Température maximale au milieu)

c) $-\lambda\frac{\partial T(\pm L,t)}{\partial x}=h\left(T(\pm L,t)-T_\infty\right)$ (Echange convectif avec le milieu extérieur)

La solution de l'équation de Fourier est cherchée sous la forme

$$T(x,t)=X(x)\Theta(t)$$

d'où

$$\frac{1}{a}X(x)\dot{\Theta}(t)=X''(x)\Theta(t)$$

$$\frac{1}{a}\frac{X(x)\dot{\Theta}(t)}{X(x)\Theta(t)}=\frac{X''(x)\Theta(t)}{X(x)\Theta(t)}$$

cette relation est valable si

$$\frac{1}{a}\frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2$$

nous obtenons ainsi, deux équations différentielles ordinaires à savoir

$$\frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)}=-k^2a$$

$$X''(x)+k^2X(x)=0$$

dont les solutions sont

$$\Theta(t)=C_1e^{-k^2at}$$

$$X(x)=C_2\cos kx+C_3\sin kx$$

par conséquent

$$T(x,t)=C_1e^{-k^2at}\left(C_2\cos kx+C_3\sin kx\right)=e^{-k^2at}\left(A\cos kx+B\sin kx\right)$$

La dérivée première de la température par rapport à l'abscisse est

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}=e^{-k^2at}\left(-Ak\sin kx+Bk\cos kx\right)$$

en appliquant la condition aux limites (b), nous obtenons

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=e^{-k^2at}\left(-Ak\sin k\times 0+Bk\cos k\times 0\right)=0$$

soit

$$B=0$$

d'où la relation

$$T(x,t)=Ae^{-k^2at}\cos kx$$

La dérivée première de la température par rapport à l'abscisse est

$$-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = Ake^{-k^2at}\sin kx$$

en appliquant la condition aux limites (c), nous trouvons

$$Ake^{-k^2at}\sin kL = \frac{h}{\lambda}Ae^{-k^2at}\cos kL \ \ (T_\infty = 0)$$

d'où

$$k\sin kL = \frac{h}{\lambda}\cos kL$$

$$kL\sin kL = \frac{hL}{\lambda}\cos kL$$

$$\cot kL = \frac{kL}{Bi}\left(Bi = \frac{kL}{\lambda}\right)$$

Par conséquent, la température s'écrit

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n e^{-k_n^2at}\cos k_n x$$

L'application de la condition initiale (a), nous donne la relation

$$T_i = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos k_n x$$

en effet, nous avons

$$\int_0^L \cos k_n x \cos k_m x dx = \frac{k_n \sin k_n L \cos k_m L - k_m \sin k_m L \cos k_n L}{2L\left(k_m^2 - k_n^2\right)}$$

mais comme

$$\frac{\cot k_n L}{k_n} = \frac{\lambda}{h} = \frac{\cot k_m L}{k_m}$$

nous avons

$$k_m \sin k_m L \cos k_n L = k_n \sin k_n L \cos k_m L$$

par conséquent, nous obtenons la relation d'orthogonalité des fonctions sinusoïdales, à savoir

$$\int_0^L \cos k_n x \cos k_m x dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$$

En appliquant ce résultat à la condition initiale, nous trouvons

$$\int_0^L (T_i - T_\infty)\cos k_n x dx = \int_0^L A_n \cos^2 k_n x dx$$

soit

$$(T_i - T_\infty)\int_0^L \cos k_n x dx = A_n \int_0^L \cos^2 k_n x dx$$

sachant que

$$\int_0^L \cos k_n x dx = \frac{1}{k_n}\sin k_n L$$

et

$$\int_0^L \cos^2 k_n x dx = \frac{L}{2} + \frac{1}{2k_n} \sin k_n L \cos k_n L$$

nous trouvons

$$(T_i - T_\infty) \frac{1}{k_n} \sin k_n L = A_n \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2k_n} \sin k_n L \cos k_n L \right)$$

$$(T_i - T_\infty) \sin k_n L = A_n \left(\frac{k_n L}{2} + \frac{1}{2} \sin k_n L \cos k_n L \right)$$

d'où

$$A_n = \frac{2(T_i - T_\infty) \sin k_n L}{k_n L + \sin k_n L \cos k_n L}$$

Exercice n°9

Sachant que la courbe du pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$ présente un maximum, trouver l'équation qui permet de déduire la loi de déplacement de Wien.

Solution

Nous remarquons que la distribution du pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$ d'un corps noir admet un maximum à $\lambda_{\max}$ qui dépend de la température T. Pour trouver ce maximum, calculons

$$\frac{dE_{\lambda,b}(\lambda, T)}{d\lambda} = 0$$

en dérivant la relation $E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \dfrac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$ par rapport à la longueur d'onde λ

nous obtenons

$$\frac{dE_{\lambda,b}(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{-5C_1 \lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + C_1 C_2 \frac{\lambda^3}{T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}{\left(\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) \right)^2} = 0$$

d'où

$$-5C_1 \lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + C_1 C_2 \frac{\lambda^3}{T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 0$$

en simplifiant et en réarrangeant nous obtenons

$$\lambda T\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1\right)=\frac{C_2}{5}e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$$

Si nous notons par $x=\frac{C_2}{\lambda T}$, cette relation s'écrit alors sous la forme

$$\frac{e^x-1}{e^x}=\frac{x}{5}$$

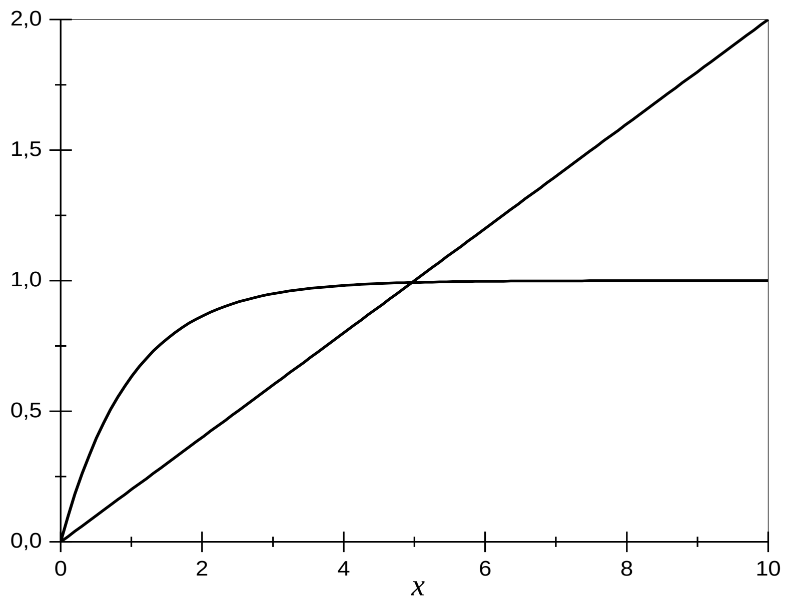
Sur la figure nous avons représenté les fonctions $\frac{e^x-1}{e^x}$ et $\frac{x}{5}$, leur point d'intersection est la solution de l'équation $\frac{e^x-1}{e^x}=\frac{x}{5}$. La valeur x qui correspond à la solution est $x=4{,}965$. Sachant que $x=\frac{C_2}{\lambda T}$, nous pouvons écrie alors

$$\frac{C_2}{\lambda_{\max}T}=4{,}965$$

en y substituant la valeur numérique de la constante C_2, nous obtenons

$$\lambda_{\max}T=2898\mu mK$$

Cette relation s'appelle la loi de déplacement de Wien. Cette loi montre que la longueur d'onde qui correspond à la valeur maximale du pouvoir émissif spectral est inversement proportionnelle à la température absolue du corps noir.



Exercice n°10

Montrer que le pouvoir émissif spectral maximal correspondant à $\lambda_m T = C_3$, est $E_b(\lambda_{\max}, T) = C_4 T^5$, calculer la valeur numérique de la constante C_4.

Solution

Le pouvoir émissif spectral maximal $E_{\lambda_{\max}}(T)$ qui correspond à la longueur maximale $\lambda_{\max}$ est obtenu en injectant la relation $\lambda_{\max} T = C_3$ dans l'équation

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

$$E_{\lambda,b}(\lambda_{\max}, T) = \frac{C_1}{\left(\frac{C_3}{T} \right)^5 \left(e^{\frac{C_2}{C_3}} - 1 \right)} = \frac{C_1}{(C_3)^5 \left(e^{\frac{C_2}{C_3}} - 1 \right)} T^5$$

soit

$$E_b(\lambda_{\max}, T) = C_4 T^5$$

Cette relation montre que le pouvoir émissif spectral maximal $E_{\lambda_{\max}}(T)$ dépend de la cinquième puissance de la température absolue du corps noir.

Exercice n°11

D'après la théorie électromagnétique de la lumière, la pression de radiation dans une cavité de volume V et de température T est $P = \frac{u}{3}$ où u est la densité d'énergie par unité de volume. Déduire la loi de Stefan-Boltzmann à partir du premier et du deuxième principe de la thermodynamique.

Solution

Considérons une cavité de volume V à la température T et contenant des ondes électromagnétiques dont la densité d'énergie est u. A partir de la théorie électromagnétique de la lumière, la pression du rayonnement P dans la cavité est

$$P = \frac{u}{3}$$

si U est l'énergie interne de la cavité, nous pouvons écrire alors que

$$U = uV$$

à partir du premier principe de la thermodynamique on a

$$TdS = dU + PdV$$

si nous y introduisons les expressions de l'énergie interne U et de la pression P, il vient alors

$$TdS = d(uV) + \frac{u}{3} dV = Vdu + udV + \frac{u}{3} dV$$

d'où l'expression de l'entropie dS

$$dS = \frac{V}{T} du + \frac{4}{3T} u dV$$

comme la densité d'énergie u des ondes électromagnétiques dans la cavité ne dépend que de la température T, nous pouvons écrire que

$$du = \frac{du}{dT} dT$$

alors dans ce cas

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3T} u dV$$

comme l'entropie S est fonction de la température T et du volume V, nous pouvons écrire

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4}{3T} u$$

puisque l'entropie S est une fonction d'état, elle doit impérativement vérifier la condition

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

calculons $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$ et $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$, d'où

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T} \frac{du}{dT}\right) = \frac{1}{T} \frac{du}{dT}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4}{3T} u\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2}\right)$$

si nous substituons ces expressions dans l'équation VI. 186, nous obtenons

$$\frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2}\right)$$

équation, qui après simplification devient

$$\frac{4u}{T} = \frac{du}{dT}$$

soit

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

la solution de cette équation différentielle à variables séparables est

$$u(T) = CT^4$$

Exercice n°12

Calculer la quantité de chaleur émise par une surface noire à $4000°C$ et déduire les fractions d'énergie émises dans les bandes spectrales suivantes :
$[0-0.38], [0.38-0.78], [0.78-\infty]\ \mu m$

Solution

La quantité de chaleur émise par la surface est le pouvoir émissif total E_b , soit

$$Q = E_b = \sigma T^4 = 5,67\times10^{-8}(4273)^4 = 189023\ kW/m^2$$

Les fractions d'énergie rayonnée dans les bandes spectrales $[0-0,38]$, $[0,38-0,78]$, $[0,78-\infty]$.

La température du corps noir est $T = 4000+273 = 4273\,K$. Posons que $\lambda_1 = 0,38\ \mu m$ et $\lambda_2 = 0,78\ \mu m$, ainsi les fractions d'énergie rayonnée qui correspondent aux valeurs $\lambda_1 T = 0,38\times4273 = 1623,74\ \mu m.K$ et $\lambda_2 T = 0,78\times4273 = 3332,94\ \mu m.K$ sont :
$f_{0-\lambda_1} = 0,019$, $f_{0-\lambda_2} = 0,31$. Par conséquent, nous avons :
Dans la bande $[0-0,38]$, la fraction d'énergie rayonnée est : $f_{0-\lambda_1} = 0,019$, dans la bande $[0,38-0,78]$, la fraction d'énergie rayonnée est : $f_{\lambda_2-\lambda_1} = f_{0-\lambda_2} - f_{0-\lambda_1} = 0,31-0,019 = 0,291$ et dans la bande $[0,78-\infty]$, la fraction d'énergie rayonnée est : $f_{\lambda_2-\infty} = 1-0,31 = 0,69$.

Exercice n°13

La température du filament d'une lampe à incandescence est $2500\,K$. Si nous supposons que le filament est un corps noir, déterminer :

a) La fraction d'énergie rayonnée dans la bande visible,
b) La longueur d'onde correspondante à l'émission maximale.

Données : $\lambda_1 = 0,4\mu m,\ \lambda_2 = 0,76\mu m$

Solution

a) Les fractions d'énergie rayonnée dans les bandes spectrales $[0-0,4]$, $[0,4-0,76]$,$[0,76-\infty]$.

La température du corps noir est $T = 2500\,K$. Posons que $\lambda_1 = 0,4\ \mu m$ et $\lambda_1 = 0,76\ \mu m$, ainsi les fractions d'énergie rayonnée qui correspondent aux valeurs $\lambda_1 T = 0,4\times2500 = 1000\ \mu m.K$ et $\lambda_2 T = 0,76\times2500 = 1900\ \mu m.K$ sont :
$f_{0-\lambda_1} = 0,000321$, $f_{0-\lambda_2} = 0,0530345$. Par conséquent, nous avons :
Dans la bande $[0-0,4]$, la fraction d'énergie rayonnée est : $f_{0-\lambda_1} = 0,000321$, dans la bande $[0,4-0,76]$, la fraction d'énergie rayonnée est : $f_{\lambda_2-\lambda_1} = f_{0-\lambda_2} - f_{0-\lambda_1} = 0,0530345-0,000321 = 0,0527135$ et dans la bande $[0,76-\infty]$, la fraction d'énergie rayonnée est : $f_{\lambda_2-\infty} = 1-0,0530345 = 0,9469655$.

b) La longueur d'onde $\lambda_{\max}$

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{T} = \frac{2898}{2500} = 1,15\ \mu m$$

Exercice n°14

Considérons une sphère de diamètre $20\,cm$ à $800\,K$ suspendue dans l'air. Si nous supposons que la sphère est un corps noir, déterminer :

a) Le pouvoir émissif total,
b) La quantité de rayonnement émis pendant cinq minutes,
c) Le pouvoir émissif à la longueur d'onde $3\,\mu m$.

Solution

a) Le pouvoir émissif total est

$$E = \varepsilon\sigma T^4 = 1\times 5{,}67\times 10^{-8}(800)^4 = 23224{,}32\; kW/m^2$$

b) La quantité de chaleur rayonnée pendant cinq minutes est

$$Q = SE\Delta t = 23224{,}32\times 10^3\times 4\times 3{,}14\times(0{,}2\times 0{,}2)\times 5\times 3600 = 2106910310\!40\; kJ$$

Exercice n°15

a) Trouver l'expression de l'élément de surface en coordonnées sphériques,
b) Déduire l'expression de l'angle solide en coordonnées sphériques sur une sphère de rayon r,
c) Calculer l'angle solide associé à une sphère et à un hémisphère.

Solution

a) Elément de surface en coordonnées sphériques

$$dS_P = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

b) L'angle solide est

$$d\Omega = \frac{dS_P}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

c) L'angle solide sous lequel un hémisphère est vu est

$$\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = 2\pi$$

L'angle solide sous lequel une sphère est vue est

$$\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi$$

Exercice n°16

La densité d'énergie contenue dans le volume d'une cavité contenant un rayonnement électromagnétique est

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{E}$$

De la thermodynamique statistique, nous savons que la probabilité de trouver un système N_i à l'état d'énergie E_i est donnée par la ce que nous appelons la distribution de Boltzmann

$$P = Ae^{-\frac{E_i}{kT}}$$

où k est la constante de Boltzmann et T est la température absolue du système. Par conséquent, l'énergie moyenne $\overline{E}$ d'un tel système est

$$\overline{E_i} = \frac{\int_0^\infty E_i e^{-\frac{E_i}{kT}} dE_i}{\int_0^\infty e^{-\frac{E_i}{kT}} dE_i}$$

L'hypothèse de Planck est que l'énergie échangée entre les oscillateurs sur la paroi de la cavité d'un corps noir et les ondes électromagnétiques stationnaires qui s'y trouvent se fait par paquets d'énergie discrets appelés quantas donnés par la formule

$$E_n = nh\nu$$

où n est un nombre entier.

a) Calculer l'énergie moyenne $\overline{E}$ des oscillateurs,
b) Calculer la densité d'énergie u_ν contenue dans le volume de la cavité contenant,
c) Sachant que $E_{\nu,b} = \frac{c}{4}u_\nu$, trouver l'expression du pouvoir émissif spectral E_ν

Solution

a) L'hypothèse de Planck est que l'énergie échangée entre les oscillateurs sur la paroi de la cavité d'un corps noir et les ondes électromagnétiques stationnaires qui s'y trouvent se fait par paquets d'énergie discrets appelés quantas donnés par la formule

$$E_n = nh\nu$$

où n est un nombre entier. Calculons à présent, l'énergie moyenne $\overline{E}$ des oscillateurs se trouvant sur la paroi de la cavité qui constitue le corps noir. Cette énergie moyenne $\overline{E}$ est donnée par la formule où nous avons remplacé l'intégrale par une sommation puisque les énergies E_n sont échangées par paquets discrets $E_n = nh\nu$

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nh\nu\, e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

Si nous posons que $x = \frac{h\nu}{kT}$, la formule précédente s'écrit alors sous la forme

$$\overline{E} = kT\frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nxe^{-nx}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nx}} = kT\frac{N(x)}{D(x)}$$

où les fonctions $N(x)$ et $D(x)$ sont définies par les expressions suivante

$$N(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} nxe^{-nx} \text{ , } D(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nx}$$

Si nous explicitons la fonction $D(x)$

$$D(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots e^{-nx}$$

nous remarquons qu'elle représente une suite géométrique de raison e^{-x}, par conséquent, nous pouvons écrire la fonction $D(x)$ sous la forme

$$D(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

La fonction $N(x)$ s'écrit

$$N(x) = xe^{-x} + 2xe^{-2x} + 3xe^{-3x} + \cdots + nxe^{-nx}$$

ou encore

$$N(x) = x\left(e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \cdots + ne^{-nx}\right)$$

cette la fonction $N(x)$ peut être réécrite aussi sous la forme

$$N(x) = -x\frac{d}{dx}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots + e^{-nx}\right) = -x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)$$

soit

$$N(x) = \frac{xe^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$$

En substituant les expressions des fonctions $N(x)$ et $D(x)$ dans l'équation de l'énergie moyenne, nous obtenons la relation

$$\overline{E} = kT\frac{xe^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{\left(1-e^{-x}\right)^2} = kT\frac{h\nu}{kT}\frac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

b) Par conséquent, la densité d'énergie u_ν contenue dans le volume d'une cavité contenant un rayonnement électromagnétique est

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

c) Trouvons maintenant, la relation entre la densité d'énergie u_ν et le pouvoir émissif spectral $E_{\nu,b}$, en effet, nous avons

$$E_{\nu,b} = \frac{c}{4}u_\nu = \frac{c}{4}\frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

Exercice n°17

Supposons que le soleil rayonne comme un corps noir, calculer sa température à partir des données suivantes :

$R_S = 7{,}0\times10^8\,m$: rayon du soleil, $R_{ST} = 15\times10^{10}\,m$: distance soleil-terre, $S = 1380\ W/m^2$: constante solaire (flux d'énergie rayonnée moyenne incidente sur l'atmosphère de la terre.

Solution

La quantité de chaleur émanant de la surface à la surface est

$$dq_{12} = I_1 \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dS_1 dS_2}{r^2}$$

ou

$$\frac{dq_{12}}{\cos\theta_2 dS_2} = I_1 \frac{\cos\theta_1 dS_1}{r^2}$$

ou encore

$$\frac{dq_{12}}{\cos\theta_2 dS_2} = E_{b1} \frac{\cos\theta_1 dS_1}{\pi r^2}$$

en intégrant

$$\int \frac{dq_{12}}{\cos\theta_2 dS_2} = \frac{E_{b1}}{\pi r^2}\int \cos\theta_1 dS_1$$

par définition, la constante solaire est

$$S = \int \frac{dq_{12}}{\cos\theta_2 dS_2}$$

et sachant que

$$\int \cos\theta_1 dS_1 = \pi R_S^2$$

$$E_{b1} = \sigma T_S^4$$

nous obtenons alors la relation

$$S = \pi R_S^2 \frac{\sigma T_S^4}{\pi r^2}$$

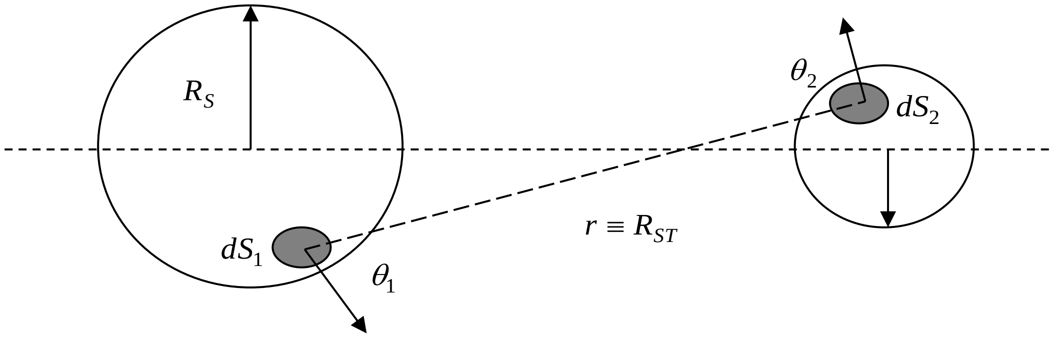
ou encore

$$S = \sigma\left(\frac{R_S}{R_{ST}}\right)^2 T_S^4$$

d'où la relation suivante pour la température de la surface du soleil

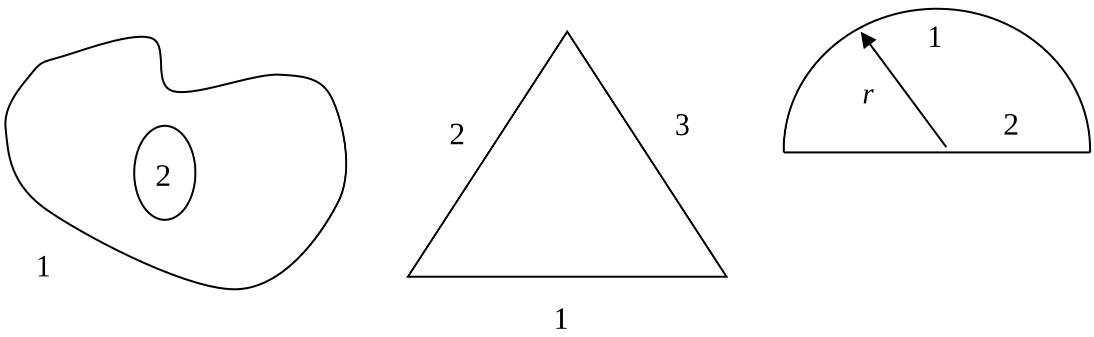
$$T_S = \left(\frac{S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{R_{ST}}{R_S}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T_S = \left(\frac{1380}{5{,}67\times10^{-8}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{15\times10^{10}}{7\times10^{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = 394{,}98\times14{,}63 = 5778{,}55\,K$$



Exercice n°18

Calculer les facteurs de forme pour les configurations suivantes :



Solution

Premier cas

$$F_{21} = 1$$
$$F_{11} + F_{12} = 1$$
$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$$
$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} F_{21} = \frac{S_2}{S_1}$$
$$F_{11} = 1 - F_{12} = 1 - \frac{S_2}{S_1}$$

Deuxième cas

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1$$
$$F_{11} = 0$$
$$F_{12} + F_{13} = 1$$
$$F_{12} = F_{13} = 0{,}5$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1$$
$$F_{22} = 0$$
$$F_{23} = 1 - F_{21}$$
$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$$
$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = F_{12}\,(S_1 = S_2)$$
$$F_{23} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{S_1}{S_2} F_{12} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

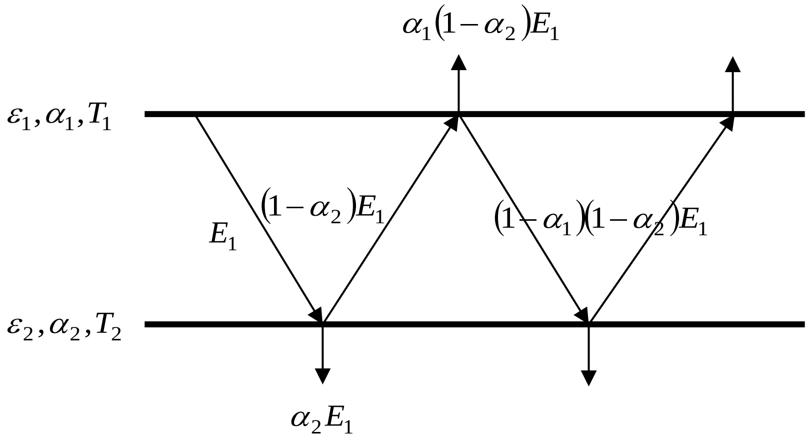
Troisième cas

$$F_{11} + F_{12} = 1$$
$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$$
$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} F_{21} = \frac{S_2}{S_1}$$
$$F_{21} = 1$$
$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} = 0{,}5$$

Exercice n°19

Calculer le facteur de forme et l'énergie rayonnée nette entre deux surfaces parallèles infinies de températures respectives T_1 et T_2. Les deux surfaces sont supposées opaques et grises d'émissivités respectives ε_1 et ε_2.

Solution



La surface 1 émet le rayonnement E_1 qui frappe la surface 2. Là, la partie $\alpha_2 E_1$ est absorbée par la surface 2 et la partie $(1-\alpha_2)E_1$ est réémise vers la surface 1. Là, la partie $\alpha_1(1-\alpha_2)E_1$ est absorbée par la surface 1 et la partie $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)E_1$ et ainsi de suite. Par conséquent, le rayonnement ayant quitté la surface 1 est

$$Q_1 = E_1 - \left[\alpha_1(1-\alpha_2)E_1 + \alpha_1(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)^2 E_1 + \alpha_1(1-\alpha_1)^2(1-\alpha_2)^3 E_1 + \ldots\right]$$
$$Q_1 = E_1 - \alpha_1(1-\alpha_2)E_1\left[1 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + (1-\alpha_1)^2(1-\alpha_2)^2 + \ldots\right]$$

$$Z = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$

$$Q_1 = E_1 - \alpha_1(1-\alpha_2)E_1\left[1 + Z + Z^2 + Z^3 + \ldots\right]$$

$$Z \prec 1$$

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + \ldots = \frac{1}{1-Z} \text{ (suite géométrique de raison } Z\text{)}$$

$$Q_1 = E_1 - \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)E_1}{1-Z} = E_1\left[1 - \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-Z}\right]$$

$$Q_1 = E_1 - \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)E_1}{1-Z} = E_1\left[1 - \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-Z}\right] = E_1\left[1 - \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\right]$$

$$\alpha_1 = \varepsilon_1, \alpha_2 = \varepsilon_2$$

$$Q_1 = E_1\left[1 - \frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\right]$$

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_2 E_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$Q_2 = \frac{\varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

Le rayonnement net entre les deux surfaces est

$$Q_{12} = Q_1 - Q_2 = \frac{\varepsilon_2 E_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2 E_1 - \varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$Q_{12} = \frac{\varepsilon_2 E_1 - \varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma T_1^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma T_2^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$Q_{12} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Comme

$$Q_{12} = F_{12}\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Le facteur de forme entre les deux surfaces est

$$F_{12} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Exercice n°20

Calculer le facteur de forme et l'énergie rayonnée nette entre deux cylindres concentriques infinis de températures respectives T_1 et T_2. Les deux surfaces sont supposées opaques et grises d'émissivités respectives ε_1 et ε_2.

Solution

$$F_{12} = 1$$

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$$

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$Q_1 = E_1 - E_1(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} - E_1(1-\varepsilon_2)^2 \varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\left(1-\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) + \ldots$$

$$Q_1 = E_1\left[1-(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} - (1-\varepsilon_2)^2 \varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\left(1-\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) + \ldots\right]$$

$$Q_1 = E_1\left[1-(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\left(1+(1-\varepsilon_2)\left(1-\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) + \ldots\right) + \ldots\right]$$

$$Q_1 = E_1\left[1-(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\left(1+(1-\varepsilon_2)\left(1-\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) + \ldots\right)^{-1} + \ldots\right]$$

$$Q_1 = E_1\left[1-\frac{(1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}}{1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right)}\right]$$

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_2 E_1}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}}$$

$$Q_2 = \frac{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} E_2}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}}$$

$$Q_{12} = S_1 Q_1 - S_2 Q_2 = \frac{\varepsilon_2 E_1 S_1}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}} - \frac{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} E_2 S_2}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}}$$

$$Q_{12} = \frac{\varepsilon_2 E_1 S_1 - \varepsilon_1 E_2 S_1}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}}$$

$$Q_{12} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S_1 \sigma T_1^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 S_1 \sigma T_2^4}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}}$$

$$Q_{12} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S_1 \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{S_1}{S_2}}$$

$$Q_{12} = \frac{S_1 \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

$$Q_{12} = F_{12} S_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$
$$F_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Exercice n°21

Considérons un four cylindrique tel que $R = H = 1\,m$, la surface supérieure (S_1) et la base (S_2) ont respectivement les émissivités $\varepsilon_1 = 0{,}8$ et $\varepsilon_2 = 0{,}4$, et maintenues aux températures $T_1 = 700\,K$ et $T_2 = 500\,K$. La surface latérale est considérée comme noire et est maintenue à la température $T_3 = 300\,K$.

a) Calculer l'énergie rayonnée par chaque surface,
b) Expliquer comment maintenir ces surfaces aux températures spécifiées durant un régime permanent.

Solution

a)

$$S_1 = S_2 = \pi R^2 = 3{,}14 \times 1^2 = 3{,}14\,m^2$$
$$S_3 = 2\pi RH = 2 \times 3{,}14 \times 1 \times 1 = 6{,}28\,m^2$$
$$F_{12} = F_{21} = 0{,}38$$
$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1$$
$$F_{13} = 1 - F_{11} - F_{12} = 1 - 0 - 0{,}38 = 0{,}62 \;\; (F_{11} = 0)$$
$$F_{23} = F_{13} = 0{,}62$$
$$S_1 F_{13} = S_3 F_{31}$$
$$F_{31} = \frac{S_1}{S_3} F_{13} = \frac{3{,}14}{6{,}28} \times 0{,}62 = 0{,}31$$
$$F_{32} = F_{31} = 0{,}31$$

$$\begin{pmatrix} 1-(1-0{,}8)\times 0 & -(1-0{,}8)\times 0{,}38 & -(1-0;8)\times 0{,}62 \\ -(1-0{,}4)\times 0{,}38 & 1-(1-0{,}4)\times 0 & -(1-0{,}4)\times 0{,}62 \\ -(1-1)\times 0{,}31 & -(1-1)\times 0;31 & 1-(1-1)F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \\ \varepsilon_3 \sigma T_3^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}076 & -0{,}124 \\ -0{,}228 & 0 & -0{,}372 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \times 5{,}67 \times 10^{-8} (700)^4 \\ 0{,}4 \times 5{,}67 \times 10^{-8} (500)^4 \\ 1 \times 5{,}67 \times 10^{-8} (300)^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}076 & -0{,}124 \\ -0{,}228 & 0 & -0{,}372 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 10890{,}93 \\ 1417{,}50 \\ 459{,}27 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = 11263{,}77\,Wm^{-2},\; J_2 = 4156{,}48\,Wm^{-2},\; J_3 = 459{,}27\,Wm^{-2}$$
$$Q_{ij} = S_i F_{ij} J_i - S_j F_{ji} J_j$$
$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$$

$$Q_{ij} = S_i F_{ij}\left(J_i - J_j\right)$$
$$Q_1 = S_1 F_{12}\left(J_1 - J_2\right) + S_1 F_{13}\left(J_1 - J_3\right)$$
$$Q_2 = S_2 F_{21}\left(J_2 - J_1\right) + S_2 F_{23}\left(J_2 - J_3\right)$$
$$Q_3 = S_3 F_{31}\left(J_3 - J_1\right) + S_3 F_{32}\left(J_3 - J_2\right)$$
$$Q_1 = 3{,}14 \times 0{,}38\left(11263{,}77 - 4156{,}48\right) + 3{,}14 \times 0{,}62\left(11263{,}77 - 459{,}27\right) = 29{,}51\,kW$$
$$Q_1 = 3{,}14 \times 0{,}38\left(4156{,}48 - 11263{,}77\right) + 3{,}14 \times 0{,}62\left(4156{,}48 - 459{,}27\right) = -1{,}28\,kW$$
$$Q_1 = 6{,}28 \times 0{,}31\left(459{,}27 - 11263{,}77\right) + 6{,}28 \times 0{,}31\left(459{,}27 - 4156{,}48\right) = -28{,}23\,kW$$
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 29{,}51 - 1{,}28 - 28{,}23 = 0$$