

Transfert de chaleur et de masse approfondi
1ère année Master génie mécanique
Énergétique

Pr. S. Saouli
Département des Sciences et Techniques
Institut des Sciences et Technologies
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila

Conduction

1. Loi de Fourier

Pour un solide homogène et isotrope (la conductivité thermique ne dépend pas de la direction), la loi de Fourier est

$$\vec{q}(M,t) = -\lambda \vec{\nabla} T(M,t)$$

où le gradient de température est un vecteur normal à la surface isotherme, le vecteur flux de chaleur $\vec{q}(\vec{r},t)$ représente la quantité de chaleur par unité de temps et par unité de la surface isotherme dans le direction des températures décroissante. Le coefficient λ est la conductivité thermique du milieu qui est un scalaire positive.

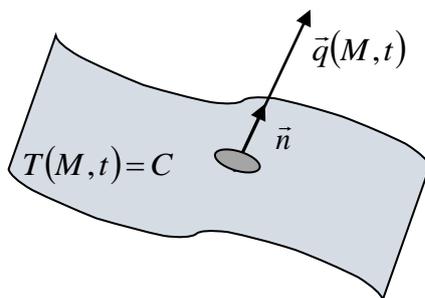


Figure II. 1. Loi de Fourier.

En coordonnées cartésiennes, la loi de Fourier s'écrit

$$\vec{q}(x,y,z,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} \vec{i} - \lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \vec{j} - \lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} \vec{k}$$

par conséquent, le vecteur flux de chaleur a les composantes

$$q_x(x,y,z,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}$$

$$q_y(x, y, z, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y}$$

$$q_z(x, y, z, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z}$$

2. Loi de Fourier généralisée

Dans le cas précédent, nous avons supposé que le solide est isotrope, c'est-à-dire que la conductivité thermique λ ne dépend pas des directions. Cependant, ils existent des matériaux que ce soit naturels ou synthétiques ayant des conductivités thermiques qui varient avec les directions. Dans le cas des solides orthotropiques, la conductivité thermique λ a des composantes différentes dans les trois directions à savoir λ_x , λ_y et λ_z . dans ce cas, le vecteur flux de chaleur s'écrit

$$\vec{q}(x, y, z, t) = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

et les composantes du vecteur flux de chaleur deviennent

$$q_x(x, y, z, t) = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y(x, y, z, t) = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z(x, y, z, t) = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Pour un solide anisotrope, la composante du flux de chaleur par exemple q_1 dans la direction Ox_1 est une combinaison linéaire des gradient de température dans les directions Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 .

Les composantes du vecteur flux de chaleur dans les directions Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 s'écrivent sous les formes

$$q_1(x_1, x_2, x_3, t) = -\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} - \lambda_{13} \frac{\partial T}{\partial x_3}$$

$$q_2(x_1, x_2, x_3, t) = -\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} - \lambda_{23} \frac{\partial T}{\partial x_3}$$

$$q_3(x_1, x_2, x_3, t) = -\lambda_{31} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \lambda_{32} \frac{\partial T}{\partial x_2} - \lambda_{33} \frac{\partial T}{\partial x_3}$$

ou sous forme compacte

$$q_i(x_j, t) = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

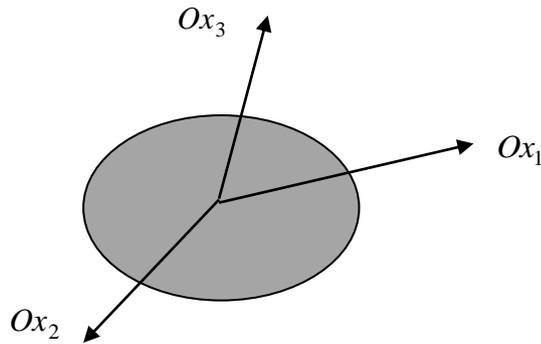


Figure. II. 2. Solide anisotrope.

Par conséquent, dans un solide anisotrope, le vecteur flux de chaleur n'est pas nécessairement perpendiculaire à la surface isotherme. La conductivité thermique d'un solide anisotrope possède neuf composantes λ_{ij} appelés coefficients de la conductivité thermique. Les relations peuvent s'écrire sous forme matricielle, soit

$$\begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Selon la théorie de la thermodynamique des phénomènes irréversibles d'Onsager, quand les flux (q_i) et les forces ($\frac{\partial T}{\partial x_j}$) sont reliés aux forces par des relations linéaires comme dans notre cas, les coefficients phénoménologiques doivent impérativement vérifier les relations

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \lambda_{ii} > 0, \lambda_{ii}\lambda_{jj} > \lambda_{ij}^2$$

3. Établissement de l'équation de la chaleur

Écrivons un bilan énergétique sur un élément de volume v entouré d'une surface S .

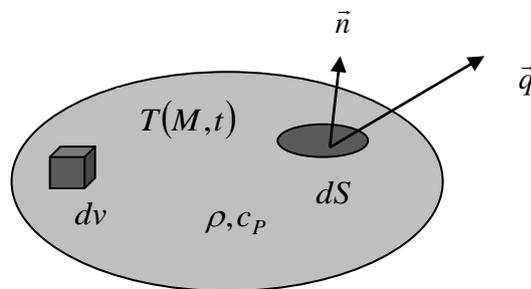


Figure II. 3. Volume de contrôle dans un champ de transfert de chaleur.

La variation de l'énergie interne U est égale à la somme des puissances calorifique et de la chaleur interne générée par une source interne de densité volumique q_s

$$\frac{dU}{dt} = -\int_s \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_v q_s dv \quad (\text{II.1})$$

Au même temps la variation de l'énergie interne, sachant que cette dernière ne dépend que de la température, s'écrit

$$\frac{dU}{dt} = \int_v \rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} dv \quad (\text{II.2})$$

où ρ et C_p sont respectivement la masse volumique et la capacité calorifique à pression constante du milieu. En insérant ces termes dans le bilan énergétique on obtient

$$\int_v \rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} dv = -\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dv + \int_v q_s dv \quad (\text{II.3})$$

avec la loi de Fourier

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T(M,t) \quad (\text{II.4})$$

nous arrivons à

$$\int_v \rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} dv = \int_v \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T(M,t)) dv + \int_v q_s(M,t) dv \quad (\text{II.5})$$

en mettant tous les termes sous le signe d'intégration, nous obtenons

$$\int_v \left[\rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T(M,t)) - q_s(M,t) \right] dv = 0 \quad (\text{II.6})$$

Cette intégrale ne peut être nulle que si la fonction sous le signe de l'intégrale est nulle, d'où la relation

$$\rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T(M,t)) + q_s(M,t) \quad (\text{II.7})$$

C'est l'équation de la chaleur sous sa forme générale dans un solide immobile en présence de sources de chaleur interne.

Généralement, la conductivité thermique λ peut être considérée comme constante et par conséquent, l'équation de la chaleur prend la forme

$$\rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,z) + q_s(M,t) \quad (\text{II.8})$$

où Δ est l'opérateur Laplacien.

Divisons les deux membres de cette équation par le terme ρC_p , pour obtenir

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a \Delta T(M,z) + \frac{q_s(M,t)}{\rho C_p} \quad (\text{II.9})$$

Le coefficient $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ est appelé coefficient de diffusion thermique.

4. Équation de la chaleur dans un solide anisotrope

Dans un solide anisotrope les composantes du vecteur flux de chaleur s'écrivent

$$q_x(M,t) = -\lambda_{11} \frac{\partial T(M,t)}{\partial x} - \lambda_{12} \frac{\partial T(M,t)}{\partial y} - \lambda_{13} \frac{\partial T(M,t)}{\partial z}$$

$$q_y(M,t) = -\lambda_{21} \frac{\partial T(M,t)}{\partial x} - \lambda_{22} \frac{\partial T(M,t)}{\partial y} - \lambda_{23} \frac{\partial T(M,t)}{\partial z}$$

$$q_z(M,t) = -\lambda_{31} \frac{\partial T(M,t)}{\partial x} - \lambda_{32} \frac{\partial T(M,t)}{\partial y} - \lambda_{33} \frac{\partial T(M,t)}{\partial z}$$

En substituant ces relations dans l'équation de la chaleur

$$\rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + q_s(M,t)$$

soit

$$\rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x(M,t)}{\partial x} - \frac{\partial q_y(M,t)}{\partial y} - \frac{\partial q_z(M,t)}{\partial z} + q_s(M,t)$$

Nous obtenons l'équation de chaleur en coordonnées cartésiennes dans un milieu anisotrope sous la forme

$$\begin{aligned} \rho C_P \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = & \lambda_{11} \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial x^2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial y^2} + \lambda_{33} \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial z^2} \\ & + (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial x \partial y} + (\lambda_{13} + \lambda_{31}) \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial x \partial z} \\ & + (\lambda_{23} + \lambda_{32}) \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial y \partial z} + q_s(M,t) \end{aligned}$$

5. Conditions aux limites non-linéaires

Considérons un élément de surface du solide avec un vecteur unitaire \vec{n} sujette à un transfert de chaleur par convection q_{conv} , par rayonnement q_{ray} et un apport externe de chaleur q_a comme le montre la figure I. 4.

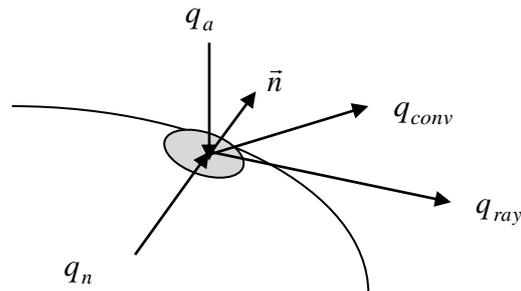


Figure II. 4. Conditions aux limites.

Le flux de chaleur échangée par convection q_{conv} , selon la loi de Newton, est

$$q_{conv} = h(T - T_{\infty})$$

Le flux de chaleur quantité de chaleur échangée par rayonnement q_{ray} , selon la loi de Stefan-Boltzmann, est

$$q_{ray} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_r^4)$$

Le flux de chaleur dans la direction normale à la surface est

$$q_n = -\lambda \vec{\nabla}T \cdot \vec{n}$$

En coordonnées cartésiennes, nous avons

$$\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{n} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$$

En injectons ces relations dans la relation I.23, nous obtenons

$$q_n = -\lambda \left(l_x \frac{\partial T}{\partial x} + l_y \frac{\partial T}{\partial y} + l_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

Un bilan sur l'élément de surface, s'écrit

$$q_n + q_a = q_{conv} + q_{ray}$$

En introduisant les relations I.21, I.22 et I.23 dans la relation ci-dessus, nous obtenons

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + q_a = h(T - T_{\infty}) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_r^4)$$

Relation qui s'écrit aussi sous la forme

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + hT + \varepsilon\sigma T^4 = q_a + hT_{\infty} + \varepsilon\sigma T_r^4$$

Dans cette équation, toutes les quantités à droite sont connues et la température de la surface T est inconnue.

La condition aux limites générale est non-linéaire parce qu'elle contient la quatrième puissance de l'inconnue qui est la température.

Dans le cas où $\frac{(T - T_r)}{T_r} \ll 1$, il est possible de linéariser l'équation I.29. En effet posons que

$$\frac{T - T_r}{T_r} = \alpha, (\alpha \ll 1)$$

d'où

$$T = (\alpha + 1)T_r$$

Le terme $T^4 - T_r^4$ peut s'écrire sous la forme

$$T^4 - T_r^4 = (T - T_r)(T^3 + TT_r^2 + T^2T_r + T_r^3)$$

En remplaçant T par son expression, nous obtenons

$$T^4 - T_r^4 = (T - T_r)(\alpha^3 + 4\alpha^2 + 6\alpha + 4)T_r^3$$

Comme α est très petit devant l'unité, nous pouvons écrire cette relation sous la forme

$$T^4 - T_r^4 = 4T_r^3(T - T_r)$$

Par conséquent, l'équation devient

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + q_a = h(T - T_\infty) + h_r(T - T_r)$$

où h_r est le coefficient d'échange pour le rayonnement donné par la relation

$$h_r = 4\varepsilon\sigma T_r^3$$

6. Conditions aux limites linéaires

Si nous regardant attentivement l'équation de la chaleur, nous remarquons qu'elle renferme une dérivée du premier ordre par rapport au temps et des dérivées du second ordre par rapport à l'espace, cela implique impérativement trois conditions aux limites. Une première condition au limite par rapport au temps et deux conditions aux limites par rapport à l'espace, c'est ce que nous allons détailler dans ce qui suit.

6.1. Condition initiale

Si la distribution de la température à l'instant $t = t_0$ est une certaine fonction $f(M, t_0)$, la condition initiale est

$$T(M, t) = f(M, t_0) \quad (\text{II.10})$$

6.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sur la température $T(M, t)$ dépendent des situations physiques envisagées.

a) *Surface à température constante (Condition de Dirichlet)*

Si pour une position spatiale M_0 , la température est constante alors, la condition aux limites dans ce cas est

$$T(M, t) = g(M_0, t) \quad (\text{II.11})$$

Cette condition s'appelle aussi condition du premier type. En pratique cette condition aux limites se rencontre dans le cas où la surface est au contact avec un solide en fusion ou un liquide en ébullition (changement de phase). Dans ces deux cas, il y a un transfert de chaleur à travers la surface pendant que la température reste constante durant ce changement de phase.

b) *Surface soumise à un flux de chaleur (condition de Neumann)*

Si maintenant pour la position spatiale M_0 , un flux de chaleur q est imposé, la condition aux limites dans ce cas devient

$$-\lambda \frac{\partial T(M_0, t)}{\partial M} = q \quad (\text{II.12})$$

Cette condition aux limites appelée aussi condition du second type se rencontre lors du chauffage de la surface par un flux de chaleur comme par exemple avec une résistance électrique.

Si la position spatiale M_0 est adiabatique donc isolée, la condition aux limites est alors

$$\frac{\partial T(M_0, t)}{\partial M} = 0 \quad (\text{II.13})$$

c) *Surface au contact d'un fluide (condition du troisième type)*

Finalement, il se peut que pour la position spatiale M_0 l'échange de chaleur s'effectue par convection, la condition aux limites dans ce cas s'écrit

$$-\lambda \frac{\partial T(M_0, t)}{\partial M} = h(T(M_0, t) - T_\infty) \quad (\text{II.14})$$

7. Une autre façon d'établir l'équation de la chaleur

7. 1. Coordonnées cartésiennes

Considérons un cube élémentaire de côtés dx , dy et dz entourant un milieu immobile à la température $T(x, y, z, t)$. Les quantités de chaleur par condition perpendiculaire à chaque surface du cube aux points x , y et z sont

$$Q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz, \quad Q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx dz, \quad Q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \quad (\text{II.15})$$

Les quantités de chaleur par conduction à travers les surfaces opposées aux surfaces précédentes sont obtenues par un développement de Taylor au premier degré, soit

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \quad (\text{II.16})$$

$$Q_{y+dy} = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \quad (\text{II.17})$$

$$Q_{z+dz} = Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz \quad (\text{II.18})$$

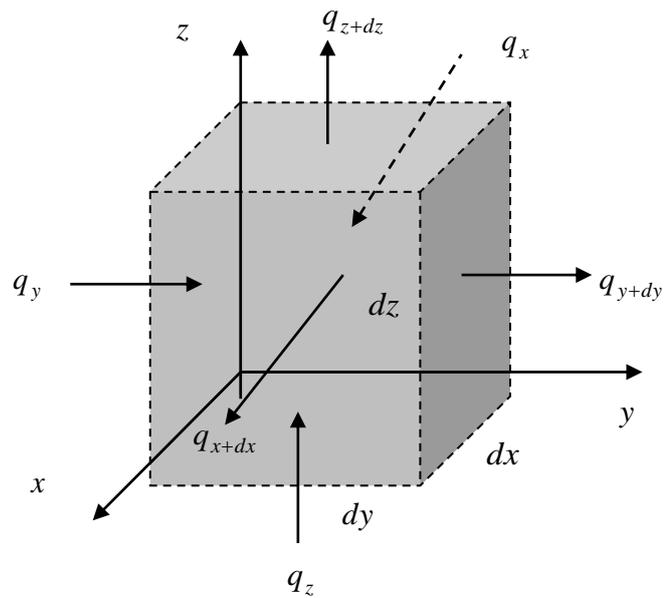


Figure II. 5. Élément de volume $dv = dxdydz$ en coordonnées cartésiennes.

Si dans le milieu existe une source de chaleur volumique q_s , l'énergie générée E_g dans le volume du cube est alors

$$dE_g = q_s dx dy dz \quad (\text{II.19})$$

L'énergie stockée E_{St} dans le volume du cube est

$$dE_{St} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (\text{II.20})$$

Le bilan énergétique sur le volume du cube en vertu du principe de la conservation d'énergie est

$$dE_{St} = dE_e + dE_g - dE_s \quad (\text{II.21})$$

soit

$$\begin{aligned} \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz &= Q_x + Q_y + Q_z + q_s dx dy dz \\ &\quad - Q_{x+dx} - Q_{y+dy} - Q_{z+dz} \end{aligned}$$

en utilisant les relations II.16 et 17, 18, nous obtenons

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz + q_s dx dy dz \quad (\text{II.22})$$

en y injectant les relations II.15, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\rho C_P \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &\quad + q_s dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

En simplifiant par l'élément de volume $dx dy dz$, nous aboutissant à l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes sous sa forme la plus générale

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_s \quad (\text{II.24})$$

Si la conductivité thermique λ est constante nous retrouvons l'équation II.9 à savoir

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q_s}{\rho C_p} \quad (\text{II.25})$$

7. 2. Coordonnées cylindriques

Quand l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ est exprimé en coordonnées cylindriques, la loi de Fourier s'écrit

$$\vec{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + \frac{\partial T(r, \varphi, z)}{\partial z} \vec{e}_z \right) \quad (\text{II.26})$$

les flux de chaleur

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{II.27})$$

sont respectivement les composantes du flux de chaleur dans les directions radiale, circonférentielle et axiale.

En appliquant le principe de conservation d'énergie sur l'élément de volume $r dr d\varphi dz$, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_s \quad (\text{II.28})$$

Si la conductivité thermique λ est constante, cette équation devient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q_s}{\rho C_p} \quad (\text{II.29})$$

7. 3. Coordonnées sphériques

En exprimant l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ en coordonnées sphériques, la loi de Fourier s'écrit

$$\vec{q} = -\lambda \left[\frac{\partial T(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right] \quad (\text{II.30})$$

les flux de chaleur

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_\varphi = -\frac{\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (\text{II.31})$$

sont respectivement les composantes du flux de chaleur dans les directions radiale, polaire et azimutale. En appliquant le principe de conservation d'énergie sur l'élément de volume $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q_s \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Si la conductivité thermique λ est constante, l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \frac{\alpha}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{q_s}{\rho C_p} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

8. Formes spéciales de l'équation de chaleur

Reprenons l'équation de la chaleur sous sa forme générale dans le cas où la conductivité thermique est constante, soit

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, z) + \frac{q_s(M, t)}{\rho C_p} \quad (\text{II.34})$$

et intéressons-nous aux différents cas particuliers.

8. 1. Équation de Fourier

En absence de source de chaleur internes ($q_s(M, t) = 0$), l'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, z) \quad (\text{II.35})$$

cette équation est appelée équation de Fourier.

8. 2. Équation de Poisson

En régime permanent, la température ne dépend pas du temps ($\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = 0$), l'équation de chaleur est connue sous le nom de l'équation de Poisson et elle s'écrit

$$\Delta T(M) + \frac{q_s(M)}{\lambda} = 0 \quad (\text{II.36})$$

8. 3. Équation de Laplace

L'équation de Laplace est obtenue dans le cas du régime permanent et en absence de sources de chaleur internes ($q_s(M, t) = 0$), soit

$$\Delta T(M) = 0 \quad (\text{II.37})$$

Conduction en régime transitoire

1. Cas de résistance interne négligeable

Considérons le cas du refroidissement d'un corps solide de masse volumique ρ , de capacité calorifique C , de volume V et de surface S porté à la température T et qu'on plonge rapidement dans un fluide de température T_∞ (supposée constante). Le corps est supposé de petites dimensions de sorte que tout gradient de température à l'intérieur du corps est négligé (résistance interne négligeable). Si h est le coefficient d'échange convectif, la variation de l'énergie interne est égale à la quantité de chaleur échangée par convection entre le corps solide et le fluide

$$-\rho CV \frac{dT(t)}{dt} = hS(T(t) - T_\infty) \quad (\text{IV.1})$$

avec la condition aux limites

$$t = 0, T = T_0 \quad (\text{IV.2})$$

Comme T_∞ est supposée constante, la solution l'équation IV. 1 est

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hS}{\rho CV} t} \quad (\text{IV.3})$$

Le terme $\frac{hS}{\rho CV} t$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{hS}{\rho CV} t = \frac{hL}{\lambda} \frac{at}{L^2} \quad (\text{IV.4})$$

où $a = \frac{\lambda}{\rho C}$ est la diffusivité thermique et $L = \frac{V}{S}$ est la longueur caractéristique du corps solide. Le rapport $\frac{hL}{\lambda}$ est un nombre adimensionnel appelé le nombre de Biot et le rapport $\frac{at}{L^2}$ est aussi un nombre adimensionnel appelé le nombre de Fourier de sorte que

$$Bi = \frac{hL}{\lambda}, Fo = \frac{at}{L^2} \quad (\text{IV.5})$$

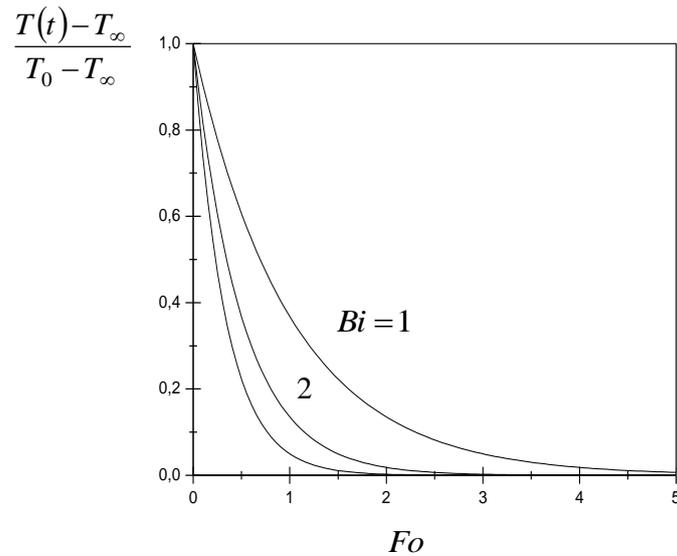


Figure IV. 1. Profil de la température $\frac{T(t)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}$ en fonction du nombre de Fourier pour différentes valeurs du nombre de Biot.

Par conséquent, la température du corps solide peut être écrite sous la forme

$$\frac{T(t)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = e^{-BiFo} \quad (\text{IV.6})$$

2. Cas d'un solide semi-infini

Considérons la conduction de chaleur en régime transitoire dans un solide semi-infini de largeur L . La distribution de température $T(x,t)$ est obtenue en résolvant l'équation de Fourier

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{IV.7})$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad T(x,L) = T_0, \quad T(x,0) = f(x) \quad (\text{IV.8})$$

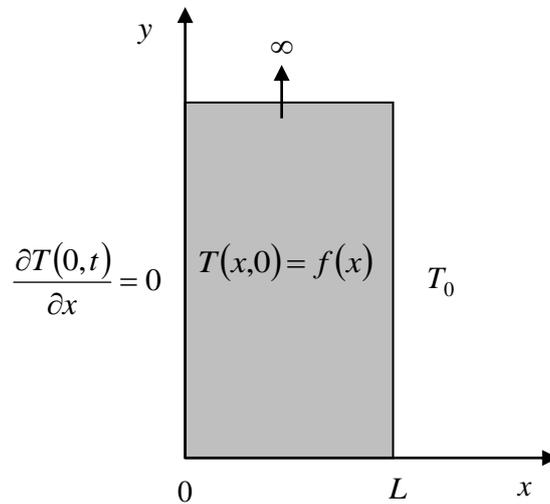


Figure IV. 2. Solide semi-infini.

Utilisons la méthode de séparation de variables et cherchons la solution sous la forme

$$T(x,t) = X(x)\Theta(t) \quad (\text{IV.9})$$

En remplaçant la dérivée seconde par rapport à la coordonnée x ($\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = X''(x)\Theta(t)$) et la dérivée première par rapport au temps

en posant $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = X(x)\dot{\Theta}(t)$ dans l'équation de Fourier, nous obtenons deux équations différentielles ordinaires indépendantes

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \quad (\text{IV.10})$$

$$\dot{\Theta}(t) + ak^2 \Theta(t) = 0 \quad (\text{IV.11})$$

où k est une constante réelle positive. Les solutions de ces équations différentielles sont

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (\text{IV.12})$$

$$\Theta(t) = C_3 e^{-ak^2 t} \quad (\text{IV.13})$$

par conséquent, la température $T(x,t)$ est

$$T(x,t) = C_3 e^{-ak^2 t} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)$$

et comme T_0 est constante, nous pouvons écrire cette température sous la forme

$$T(x,t) - T_0 = C_3 e^{-ak^2 t} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) \quad (\text{IV.14})$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial T(0,t) - T_0}{\partial x} = 0, \quad T(x,L) - T_0 = 0, \quad T(x,0) - T_0 = f(x) \quad (\text{IV.15})$$

En appliquant ces conditions aux limites nous obtenons

$$T(x,t) - T_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n e^{-ak_n^2 t} \cos k_n x \quad (\text{IV.16})$$

où le coefficient k_n est

$$k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \quad (\text{IV.17})$$

le coefficient C_n est calculé à l'aide de la formule

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos k_n x dx \quad (\text{IV.18})$$

3. Cas bidimensionnel en coordonnées cartésiennes

Considérons à présent la conduction en régime transitoire dans une plaque rectangulaire de côtés L_1 et L_2 .

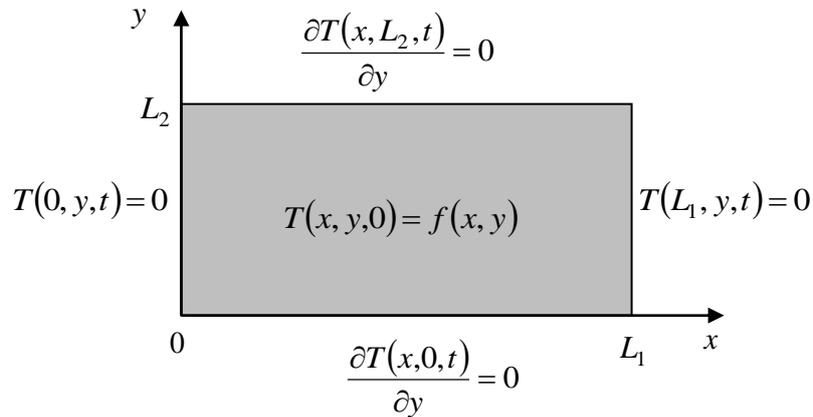


Figure IV. 3. Conduction bidimensionnelle transitoire dans une plaque rectangulaire.

L'équation de Fourier bidimensionnelle dans ce cas est

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (\text{IV.19})$$

Les conditions aux limites pour ce problème sont

$$T(x, y, 0) = f(x, y), \quad T(0, y, t) = 0, \quad T(L_1, y, t) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T(x,L_2,t)}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Cherchons la solution de l'équation de Fourier sous la forme

$$T(x, y, t) = X(x)Y(y)\Theta(t) \quad (\text{IV.22})$$

En dérivant cette fonction deux fois par rapport aux variables d'espace x et y , et une fois par rapport au temps t , nous trouvons

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a} \frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2 \quad (\text{IV.23})$$

relation à partir de laquelle nous déduisons la première équation différentielle ordinaire pour la fonction $X(x)$, qui est

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \quad (\text{IV.24})$$

dont la solution est

$$X_m(x) = C_1 \sin \frac{m\pi x}{L_1} \quad (\text{IV.25})$$

En substituant la valeur du coefficient k qui est $k = \frac{m\pi}{L_1}$ dans

l'équation IV. 23, nous obtenons

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{a} \frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)} + \frac{m^2 \pi^2}{L_1^2} = -\mu^2 \quad (\text{IV.26})$$

équation à partir de laquelle nous déduisons la deuxième équation différentielle ordinaire pour la fonction $Y(y)$ et qui est

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0 \quad (\text{IV.27})$$

dont la solution est

$$Y_n(y) = C_2 \cos \frac{n\pi y}{L_2} \quad (\text{IV.28})$$

En substituant la valeur du coefficient μ qui est $\mu = \frac{n\pi}{L_2}$ dans l'équation IV. 23, nous obtenons

$$\frac{1}{a} \frac{\dot{\Theta}(t)}{\Theta(t)} + \frac{m^2 \pi^2}{L_1^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_2^2} = 0 \quad (\text{IV.29})$$

équation que nous pouvons écrire aussi sous la forme

$$\dot{\Theta}(t) + a\pi^2 \left(\frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} \right) \Theta(t) = 0 \quad (\text{IV.30})$$

et dont la solution est

$$\Theta_{mn}(t) = C_{mn} \exp \left(-a\pi^2 \left(\frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} \right) t \right) \quad (\text{IV.31})$$

Par conséquent, la température $T_{mn}(x, y, t)$ s'écrit

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \exp \left(-a\pi^2 \left(\frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} \right) t \right) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \cos \frac{n\pi y}{L_2} \quad (\text{IV.46})$$

L'application de la condition initiale, nous donne la relation

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \cos \frac{n\pi y}{L_2} \quad (\text{IV.47})$$

Par conséquent, les coefficients A_{mn} se calculent à partir de la formule

$$A_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \cos \frac{n\pi y}{L_2} dx dy \quad (\text{IV.48})$$

4. Cas d'une sphère

Considérons une sphère de rayon R qui échange de la chaleur par convection avec le milieu extérieur à la température T_∞ . Nous supposons que la température initiale de la sphère est une certaine fonction $f(r)$, de plus nous admettons que la température de la sphère ne dépend que du rayon r . L'équation de Fourier dans ce cas s'écrit

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \Delta T(r,t) \quad (\text{IV.49})$$

avec les conditions aux limites

$$T(r,0) = f(r), \quad -\lambda \frac{\partial T(R,t)}{\partial r} = h(T(R,t) - T_\infty) \quad (\text{IV.50})$$

Comme T_∞ est constante, cherchons la solution de l'équation de Fourier sous la forme

$$T(r,t) - T_\infty = AV(r)e^{-\omega t} \quad (\text{IV.51})$$

En substituant cette expression dans l'équation de Fourier, nous obtenons

$$\Delta V(r) + \frac{\omega}{a} V(r) = 0 \quad (\text{IV.52})$$

ou encore

$$\frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV(r)}{dr} + \frac{\omega}{a} V(r) = 0 \quad (\text{IV.53})$$

Si nous utilisons la fonction $U(r) = rV(r)$, l'équation précédente devient

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \alpha^2 U(r) = 0 \quad (\text{IV.54})$$

où $\alpha^2 = \frac{\omega}{a}$. La solution de cette équation différentielle est

$$U(r) = C_1 \cos \alpha r + C_2 \sin \alpha r$$

d'où nous obtenons pour la fonction $V(r)$ l'équation

$$V(r) = C_1 \frac{\cos \alpha r}{r} + C_2 \frac{\sin \alpha r}{r} \quad (\text{IV.55})$$

Remarquons que pour $r = 0$, la fonction $V(r)$ sera indéterminée, pour cela nous devons prendre $C_1 = 0$, d'où

$$V(r) = C_2 \frac{\sin \alpha r}{r} \quad (\text{IV.55})$$

par conséquent, la température $T(r) - T_\infty$ s'écrit

$$T(r,t) - T_\infty = A \frac{\sin \alpha r}{r} e^{-\omega t} \quad (\text{IV.56})$$

L'application de la condition aux limites

$$-\lambda \frac{\partial(T(R,t) - T_\infty)}{\partial r} = h(T(R,t) - T_\infty)$$

nous conduit à

$$A \frac{\alpha R \cos \alpha R - \sin \alpha R}{R^2} e^{-\omega t} = -\frac{h}{\lambda} A \frac{\sin \alpha R}{R} e^{-\omega t}$$

relation, qui après réarrangement devient

$$\alpha_n R \cot g \alpha_n R = 1 - \frac{h}{\lambda} R \quad (\text{IV.57})$$

Les valeurs possibles du coefficient α_n sont solutions de cette équation, par conséquent la température $T(r) - T_\infty$ peut être représentée par la série

$$T(r,t) - T_\infty = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n e^{-a \alpha_n^2 t} \frac{\sin \alpha_n r}{r} \quad (\text{IV.58})$$

À partir de la condition initiale, nous avons

$$rf(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \alpha_n r \quad (\text{IV.59})$$

Comme les fonctions $\sin \alpha_n r$ sont orthogonales dans l'intervalle $[0, R]$, le coefficient A_n sont déterminés à partir de la formule

$$A_n = \frac{\int_0^R rf(r) \sin \alpha_n r dr}{\int_0^R \sin^2 \alpha_n r dr} \quad (\text{IV.60})$$

5. Plaque semi-infinie soumise à une température périodique

Considérons un solide semi-infini dont l'un des côté est soumis à une température périodique de la forme $T(0, t) = T_0 \cos \omega t$ comme le montre la figure IV. 4.

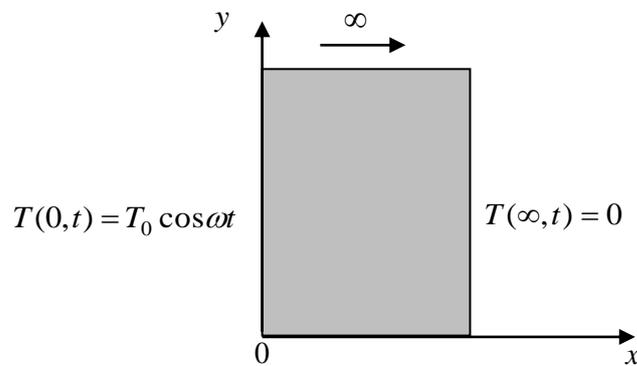


Figure IV. 4. Solide semi-infini soumis à une température périodique.

L'équation de Fourier est

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{IV.61})$$

avec les conditions aux limites

$$T(0,t) = T_0 \cos \omega t, \quad T(\infty,t) = 0 \quad (\text{IV.62})$$

Cherchons la solution sous la forme $T(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$, en effet si nous substituons cette solution dans l'équation de Fourier, nous obtenons l'équation différentielle suivante pour la fonction $X(x)$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{i\omega}{a} X(x) = 0 \quad (\text{IV.63})$$

dont la solution est

$$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \quad (\text{IV.64})$$

Mais en vertu de la deuxième condition aux limites, la température doit être finie pour $x = \infty$, pour y remédier à cette contrainte, nous devons éliminer le terme divergent dans la solution en prenons $C_1 = 0$, par conséquent la solution retenue dans ce cas est

$$X(x) = C_2 e^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \quad (\text{IV.64})$$

Sachant que $\sqrt{i\omega} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}$, nous pouvons écrire que

$$T(x,t) = C_2 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} e^{i\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)} \quad (\text{IV.65})$$

La partie réelle de cette solution est

$$T(x,t) = C_2 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \quad (\text{IV.66})$$

A partir de la première condition aux limites, nous obtenons

$$C_2 = T_0$$

et par conséquent, la température $T(x,t)$ devient

$$T(x,t) = T_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \quad (\text{IV.67})$$

Nous remarquons que l'amplitude de la température $T(x,t)$ décroît avec l'abscisse x et de plus il y a un déphasage entre la température $T(x,t)$ et la température $T(0,t)$ égal à $x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$.