CHAPITRE III : CINÉMATIQUE DES LIQUIDES.

III.1 Notions de la cinématique :

La cinématique du liquide c'est l'étude du mouvement des liquides sans tenir compte des forces qui lui donnent naissance. On considère donc seulement les relations entre les positions des particules liquides et le temps.

III. 2 Mouvement d'un liquide:

Pour étudier le mouvement d'un liquide quelconque, on peut utiliser deux méthodes:

III.2.1 La méthode de Lagrange:

Cette méthode consiste d'une manière générale d'analyser le mouvement d'un liquide pourra consister à accompagner le mouvement d'une particule individualisée.

On appelle trajectoire de la particule le lieu géométrique des positions successives occupées par la particule au cours du temps.

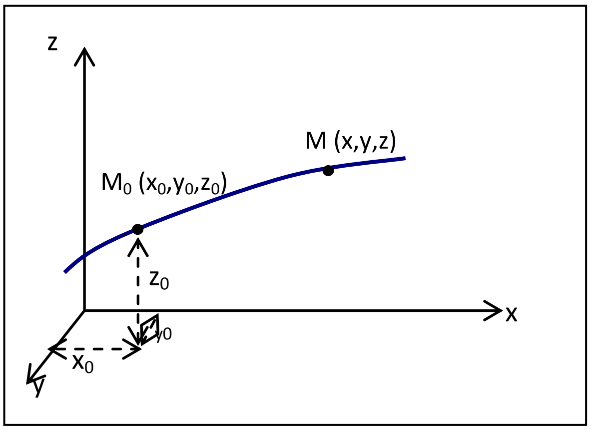

Fig. (III.1)

Dans la (Fig.III.1) soit la trajectoire M_0 M sur laquelle passe une particule d'un liquide déterminé par les coordonnées initiales de temps t_0 et de la position initiale du point considéré.

$$M = \begin{cases} x = f\,(x_0, y_0, z_0) \\ y = \rho\,(x_0, y_0, z_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{III.1} \\ z = \psi\,(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

x, y et z sont les variables de Lagrange.

- Les composantes de la vitesse : $\vec{V}$ (V_x ,V_y ,V_z)

$$\vec{V}\quad\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d[f(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d[\rho(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d[\varphi(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \end{cases} \qquad \text{……………………………III.2}$$

La vitesse sera déterminée : V = $\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ ……………………………III.3

I.2.2 La méthode d'Euler:

Cette méthode consiste à considérer un point fixe de l'espace et à étudier, en fonction du temps, ce qui passe en ce point.

La particule qui passe au point M (Fig.III.2) M (x, y, z) à l'instant t consiste un groupe de variable indépendant d'Euler M (x, y, z, t).

On déterminera donc en fonction du temps la vitesse des particules liquides qui viennent successivement passer par ce point.

La méthode d'Euler ne s'intéresse pas à la trajectoire des particules, mais au champ des vectrices vitesses c à d en chaque point de l'espace au temps (t) correspond à une vitesse ($\vec{V}$).

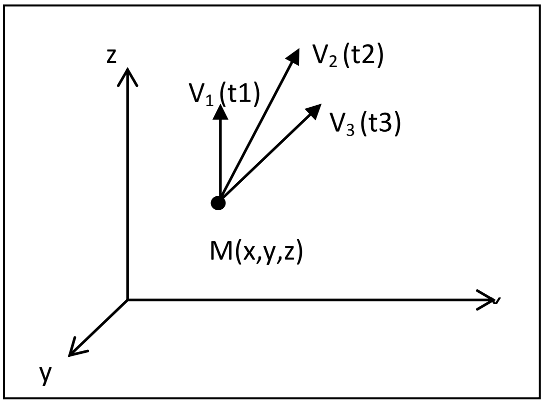

Fig. (III.2)

On déterminera donc, en fonction du temps la vitesse des particules liquides qui viennent successivement passer par ce point. La vitesse $\vec{V}$ $(\upsilon, \vartheta, \omega)$.

$$(\vec{V}).\quad\begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ v = \rho(x, y, z, t) \\ w = \psi(x, y, z, t) \end{cases} \qquad \text{………………………III.4}$$

u,*v* et *w* sont les variables d'Euler

La variation totale de la vitesse selon l'axe x est donnée par:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.5}$$

III.3 Lignes de courant:

On appelle lignes de courant les lignes tangentes, en chaque point et à chaque instant, au vecteur vitesse (Fig. III.3). Les équations différentielles des lignes de courant s'écrivent:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.6}$$

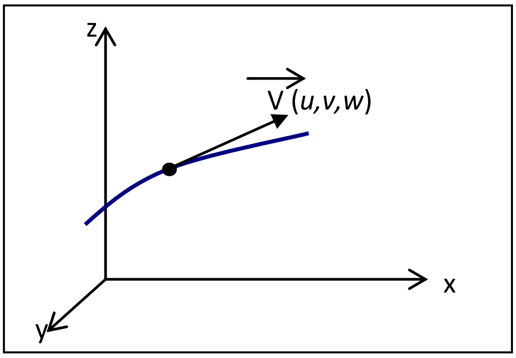

Fig. (III.3)

III.4 Equation de la continuité:

L'équation de la continuité est une équation fondamentale de la mécanique des fluides, exprime le principe de conservation de la masse. L'équation de la continuité pour un liquide parfait est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.7}$$

Avec :

d_x d_y d_z : les arêtes du parallélépipède élémentaire,

u ,*v* ,*w* : les composantes vecteur vitesse V.

ρ : la masse volumique.

- **Cas particuliers:** pour un liquide incompressible la masse volumique du liquide est constante donc l'équation de la continuité devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{Ou} \qquad \text{div } \vec{V} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{III.8}$$

Où $\vec{V} = (u, v, w)$ est le vecteur vitesse.

Pour un écoulement permanant et incompressible et plan, x, y, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

- **Débit :**

Pour un fluide incompressible, l'interprétation physique est la suivante: les débits entrant et sortant à travers une surface quelconque fermée doivent êtres égaux.

Par définition le débit total (**Q)** , traversant une surface est donné par:

$$Q=V.S$$

Où V: la vitesse moyenne sur cette surface. S.

I.5. Les différents types d'écoulement :

III.5.1 Ecoulement rotationnel :

Considérons un élément de fluide de section dx dz qui subit une rotation pendant un temps dt (Fig.III.4.a)

Le taux de rotation de cet élément de fluide dx dy , autour d'un axe passant par y : $-\frac{[w+(\partial w/\partial x)dx-w]}{dx}=-\frac{\partial w}{\partial x}$

Et suivant z: $+\frac{[u+(\partial u/\partial z)dz-u]}{dz}=-\frac{\partial u}{\partial z}$

(On considère le sens positif c'est le sens des aiguilles d'un élément montre).

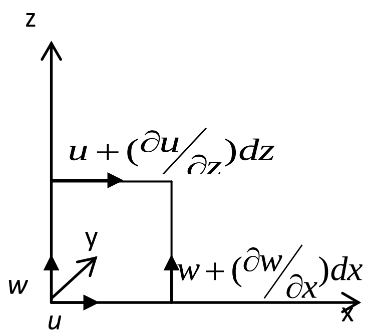

Fig. (III.4.a)

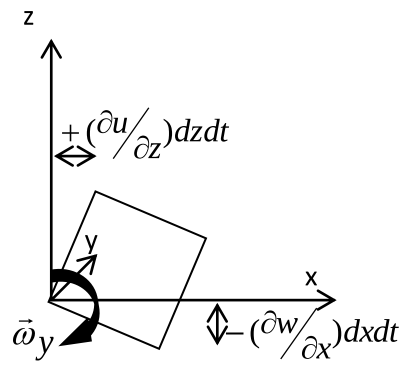

Fig. (III.4.b)

III.5.2 Ecoulement ir-rotationnel :

$\rightarrow$ Si le vecteur tourbillon est nul en tout point (Fig.III.4.b):

$\vec{\Omega}=\frac{1}{2}rot\vec{V}=0$ ………III.9 $\Rightarrow$ sont appelés écoulement ir-rotationnel

$\rightarrow$ Pour un écoulement plan en x z

$$\vec{\omega}_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \text{ ……………..III.10}$$

Ce qui donne $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$ ……………..III.11