المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة
معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

السنة الأولى ماستر

تخصص: إقتصاد نقدي وبنكي 2020/2019

سلسلة تمارين رقم 03 مع الحل

التمرين 01:

لتكن لديك البيانات التالية:

t	Y_t	X_{2t}	X_{3t}
1	4	4	0.9
2	4.5	5	0.8
3	5	6	0.9
4	5.5	7	0.8
5	6	9	0.7
6	7	8	0.6
7	6.5	10	0.6
8	6.5	11	0.8
9	7.5	12	0.5
10	7.5	13	0.5
$\sum$	**60**	**85**	**7.1**

المطلوب: قدر النموذج التالي $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS. ثم استنتج القيم المقدرة وبواقي التقدير.

الحل:

لدينا:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{210} & X_{310} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}$$

$$Y_{(10\times1)} = \quad X_{(10\times3)} \quad \beta_{(3\times1)} + \varepsilon_{(10\times1)}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 85 & 7.1 \\ 85 & 805 & 57 \\ 7.1 & 57 & 5.25 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(X'X) = (-1)^{1+1}(10)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 805 & 57 \\ 57 & 5.25 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(85)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 85 & 57 \\ 7.1 & 5.25 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(7.1)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 85 & 805 \\ 7.1 & 57 \end{pmatrix}$$

$$= 10[805 \cdot 5.25 - 57 \cdot 57] - 85[85 \cdot 5.25 - 57 \cdot 7.1] + 7.1[85 \cdot 57 - 805 \cdot 7.1] = 60.2$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(X'X)}\mathrm{Adj}(X'X) = \frac{1}{60.2}\begin{pmatrix} +977.25 & -41.55 & +(-870.5) \\ -41.55 & +2.09 & -(-33.5) \\ +(-870.5) & -(-33.5) & +825 \end{pmatrix}'$$

$$= \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 541 \\ 41.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 541 \\ 41.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.29 \\ 0.24 \\ -3.30 \end{pmatrix}$$

ومنه يكون النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 6.29 + 0.24 \cdot X_{2t} - 3.30 \cdot X_{3t}$$

أما القيم المقدرة $\hat{Y}$ وبواقي التقدير e فتكون كمايلي:

$$\hat{Y}_1 = 6.29 + 0.24 \cdot (X_{21} = 4) - 3.30 \cdot (X_{31} = 0.9) = 4.28 \Rightarrow e_1 = Y_1 - \hat{Y}_1 = 4 - 4.28 = -0.28$$

$$\hat{Y}_2 = 6.29 + 0.24 \cdot (X_{22} = 5) - 3.30 \cdot (X_{32} = 0.8) = 4.85 \Rightarrow e_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 4.5 - 4.85 = -0.35$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{Y}_{10} = 6.29 + 0.24 \cdot (X_{210} = 13) - 3.30 \cdot (X_{310} = 0.5) = 7.78 \Rightarrow e_{10} = Y_{10} - \hat{Y}_{10} = 7.5 - 7.78 = -0.28$$

وهو ما يوضحه الجدول التالي:

$\hat{Y}$	e
4.28	-0.2850
4.85	-0.3571
4.76	0.2318
5.34	0.1598
6.15	-0.1538
6.24	0.7571
6.72	-0.2259
6.30	0.19369
7.53	-0.03953
7.78	-0.2810
$\sum$	**60**	**00**

التمرين 02: بأخذ معطيات التمرين 01، أوجد مايلي:

1- تقدير تباين الخطأ العشوائي.

2- بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج.

3- حساب معامل التحديد وتشكيل جدول تحليل التباين ANOVA.

الحل:

1- تقدير تباين الخطأ العشوائي.

يمكن تقدير تباين الخطأ العشوائي كما يلي:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{n-k} = \frac{\begin{pmatrix}-0.28 & -0.35 & L & -0.28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.28\\-0.35\\M\\-0.28\end{pmatrix}}{10-3} = \frac{1.05}{7} = 0.1505$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدر لشعاع المقدرات فيكون كما يلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\delta}_{\varepsilon}^2 (X'X)^{-1} = 0.1505 \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1}^2 = 0.1505(16.23) = 2.44 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{2.44} = 1.56$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_2}^2 = 0.1505(0.034) = 0.005 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{0.005} = 0.07$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_3}^2 = 0.1505(13.70) = 2.06 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{2.44} = 1.43$$

2- **بناء مجالات الثقة:** يمكن بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج كمايلي:

β_i	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}$	$St_{(n-k)}^{\frac{\alpha}{2}}$	$\hat{\beta}_i - St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2$	$\hat{\beta}_i + St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}$
β_1	$\hat{\beta}_1 = 6.29$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1} = 1.56$	$St_{(10-3)}^{2.5\%} = 2.365$	$6.29 - 2.365 \cdot (1.56)$	$6.29 + 2.365 \cdot (1.56)$
β_2	$\hat{\beta}_2 = 0.24$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_2} = 0.07$		$0.24 - 2.365 \cdot (0.07)$	$0.24 + 2.365 \cdot (0.07)$
β_3	$\hat{\beta}_3 = -3.30$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_3} = 1.43$		$-3.30 - 2.365 \cdot (1.43)$	$-3.30 + 2.365 \cdot (1.43)$

وبالتالي نجد:

$$\beta_1 \in [2.60 \quad . \quad 9.97]$$
$$\beta_2 \in [0.07 \quad . \quad 0.40]$$
$$\beta_3 \in [-6.68 \quad . \quad 0.08]$$

3- **معامل التحديد وجدول ANOVA.**

معامل التحديد يساوي:

$$R^2 = \frac{(\hat{Y} - \overline{Y})'(\hat{Y} - \overline{Y})}{(Y - \overline{Y})'(Y - \overline{Y})} = \frac{\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2} = \frac{12.44}{13.5} = 0.9219$$

أو:

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{(Y - \overline{Y})'(Y - \overline{Y})} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{1.05}{13.5} = 0.9219$$

أما معامل التحديد المصحح فيساوي:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1 - R^2) = 1 - \frac{10-1}{10-3}(1 - 0.9219) = 0.8995$$

$R^2 = 0.9219$ ، أي أن للنموذج قدرة تفسيرية عالية، كما أن 92.19% من تغيرات المتغير التابع مفسرة بتغيرات المتغيرات المستقلة المدرجة بالنموذج، بينما 07.81% المتبقية فهي مفسرة بعوامل أخرى.

أما جدول تحليل التباين فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS = 12.44$	3	$12.44/3 = 4.14$
البواقـــي e_t	$RSS = 1.05$	$10-3=7$	$1.05/7 = 0.15$
المجـــموع	$TSS = 13.5$	$10-1=9$	