دالة الإنتاج في الفترة الطويلة(ذات متغيرين)

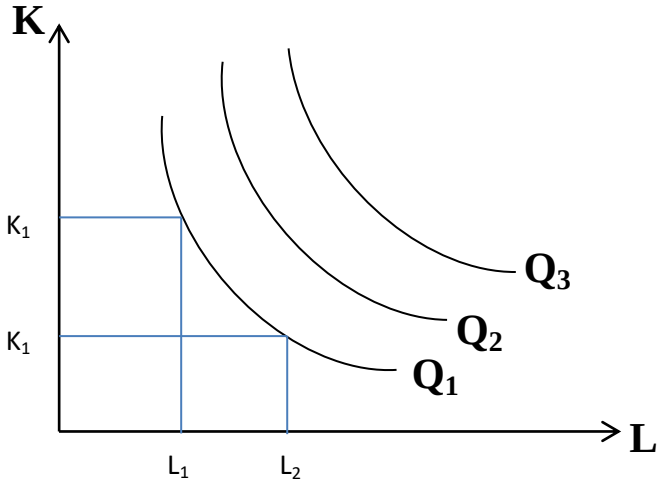
كل العوامل تكون متغيرة في المدى الطويل، ولتبسيط التحليل والتمثيل البياني فإننا سنقتصر على تغير عاملين هما العمل (L) ورأس المال(K)، وبالتالي فدالة الإنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$PT = Q = f(L,K)$$

1/منحنى الناتج المتساوي

هو عبارة عن المحل الهندسي للتوليفات المختلفة من العمل ورأس المال التي تعطي نفس المستوى من الإنتاج لكمية محددة أو متساوية من المنتوج، ويسمى أيضا منحنى الكمية المتساوية.

وبما أن دالة الإنتاج مستمرة إذن يوجد عدد لانهائي من التركيبات لـــ L و K وهذا ما يوضحه الشكل التالي:



إن منحنيات الناتج المتساوي لها خصائص تشبه (خواص) خصائص منحنيات السواء حيث:

- كلما إبتعد منحنى الناتج المتساوي عن نقطة الأصل كلما كان يعبر عن مستوى إنتاجي اكبر.
- لا تتقاطع منحنيات الناتج المتساوي لان عكس ذلك يدل على وجود نقطتين على منحنيين مختلفين للناتج المتساوي تمثلان نفس المستوى من الإنتاج (نقطة التقاطع) وهذا غير ممكن.
- منحنيات الناتج المتساوي محدبة نحو نقطة الأصل.
- منحنيات الناتج المتساوي ذات ميل سالب حيث أن الزيادة استخدام أحد العنصرين L و K يتطلب تخفيض في العنصر الأخر.

2/المعدل الحدي للإحلال التقني Toux marginal de substitution technique ($TMST_{LK}$)

المعدل الحدي الإحلال التقني للعمل (L) محل رأس المال K، ($TMST_{LK}$)، هو ذلك المعدل الذي يقيس ذلك عدد الوحدات من رأس المال K التي يتنازل عنها المنتج لزيادة كمية العمل L بوحدة واحدة مع البقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي. والمعدل الحدي الإحلال التقني عند أي نقطة على منحنى

الناتج المتساوي يساوي النسبة بين النواتج الحدية لعوامل الإنتاج عند تلك النقطة. ونكتب:

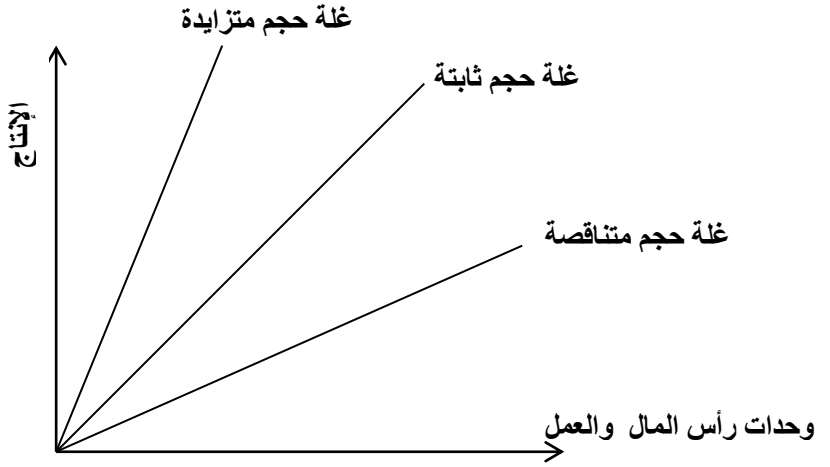
$$TMST_{L,K} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{dK}{dL} = -\frac{PmL}{PmK}$$

حيث: $\frac{dK}{dL}$ ميل منحنى الناتج المتساوي.

3/قانون غلة الحجم: لقد عرفنا سابقا أن الناتج الحدي الطبيعي لعنصر العمل L يمثل تلك الكمية المتحصل عليها من السلعة Q عند استخدام كميات متغيرة من L في حين تبقى الكميات المستخدمة من العناصر الأخرى ثابتة.

إذا اعتبرنا الآن جميع عوامل الإنتاج تتغير في آن واحد وبنفس النسبة، أي أن غلة الحجم تتغير، وهذا يستلزم بطبيعة الحال أن يكون التحليل منصب على الفترة الطويلة بطول كافي بحيث يسمح بتغير جميع عناصر الإنتاج وبتالي لا يعود هناك عنصر ثابت.

يعرف قانون غلة الحجم بأنه استجابة الناتج للزيادة المتناسبة (أي بنسبة مئوية متساوية) لجميع عوامل الإنتاج وعلى ذلك يتم التوسع في إنتاج المؤسسة باستخدام المزيد من عوامل الإنتاج، المزيد من العمل، المزيد من المعدات، المزيد من الأراضي، فإذا كانت نسبة الزيادة في الإنتاج مماثلة نسبة الزيادة في كميات عناصر الإنتاج، عندئذ يطلق على هذه الحالة إسم ثبات غلة الإنتاج. وفي هذه الحالة إذا ضاعفنا عناصر الإنتاج بأربع مرات، فإننا نحصل على إنتاج مضاعف بأربع مرات، ولكن إذا كانت نسبة الزيادة في الإنتاج تفوق نسبة الزيادة في عناصر الإنتاج، عندئذ يطلق على هذه الحالة إسم تزايد غلة الإنتاج، أما إذا كانت نسبة الزيادة في الإنتاج أقل من نسبة الزيادة في عوامل الإنتاج فإنه يطلق على هذه الحالة إسم تناقص غلة الحجم أو الإنتاج والشكل التالي يوضح ذلك:



وتشير الخطوط الثلاثة في الرسم البياني إلى العلاقات الثلاثة بين المدخلات والمخرجات لغلة الحجم، كما يبين الأنواع الثلاثة وكأنها منفصلة عن الأخرى، إلا أنه عند التوسع في الإنتاج فإن أي مؤسسة ستمر بمرحلة تزايد الغلة، ثم ثبات الغلة، وأخيرا الغلة المتناقصة.

***التعبير الرياضي لقانون غلة الحجم (دوال الإنتاج المتجانسة):** في الغالب يستعمل الاقتصاديون الأسلوب الرياضي عند التكلم عن قانون غلة الحجم إذ يتم التعبير عن غلة الحجم بواسطة دوال الإنتاج المتجانسة.

للتعرف على دوال الإنتاج المتجانسة نعتبر دالة ذات متغيرين مستقلين: $Q=f(L,K)$، نقول أن هذه الدالة متجانسة من الدرجة n، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي موجب t تتحقق العلاقة التالية:

$$Q=f(L,K)\Rightarrow f(tL,tK)=t^n f(L,K)=t^n.Q$$

حيث: t عدد حقيقي موجب $(t\in\mathbb{R},t\succ 0)$

بمعنى أنه بضرب عوامل الإنتاج في معامل t فإنه يتم ضرب دالة الإنتاج في المقدار t^n حيث n تعبر عن درجة تجانس وهناك ثلاث حالات هي:

- n=1 يعني أن دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى أي تزايد الإنتاج بنسبة معينة يؤدى إلى تزايد مستوى الانتاج بنفس النسبة، وهذا يعني أن غلة الحجم ثابتة.
- n>1 يعني تزايد عوامل الإنتاج بسبة معينة يؤدي الى تزايد مستوى الانتاج بنسبة أكبر أي غلى حجم متزايدة.
- n<1 غلة حجم متناقصة.

مثال: لتكن لدينا دالة إنتاج التالية: $Q=3L^2+5LK+7K^2$، حدد درجة التجانس لهذه الدالة وطبيعة غلة الحجم؟

$$\forall t\in\mathbb{R}^+\Rightarrow f(tL,tK)=3(tL)^2+5(tL)(tK)+7(tK)^2$$
$$=3t^2.L^2+5tLtK+7t^2K^2=3t^2.L+5t^2LK+7t^2K$$
$$=t^2(3L^2+5LK+7K^2)=t^2f(L,K)=t^2Q$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة n=2، وغلة الحجم متزايدة.

حيث إذا ضاعفنا عوامل الإنتاج (L,K)، ب T مرة سيؤدي إلى مضاعفة Q بـــ t^2.

- إذا ضاعفنا عوامل الإنتاج بـــ 2 مرة يتضاعف الإنتاج الكلي (Q) 2^2 = 4 مرات.
- إذا ضاعفنا عوامل الإنتاج بـــ 3 مرة يتضاعف الإنتاج الكلي (Q) 3^2 = 9 مرات.

***خصائص دوال الإنتاج المتجانسة**

المشتقات الجزئية الأولى لدالة الإنتاج المتجانسة من الدرجة n، تعتبر دوال متجانسة من الدرجة (n-1)، وعليه إذا كانت دوال الإنتاج متجانسة من الدرجة 1 فإن مشتقاتها تشكل دوال إنتاج متجانسة من الدرجة 0.

$$Q=f(L,K)=3L^2+5LK+7K^2\Rightarrow n=2$$
$$\frac{\delta Q}{\delta L}=PmL=6L+5K$$
$$\forall t\in\mathbb{R}^+\Rightarrow f'_L(tL,tK)=6tL+5tK=t(6L+5K)=t^1(PmL)$$

إذن مشتق دالة الإنتاج بالنسبة للعمل PmL، هي دالة متجانسة ودرجة تجانسها تساوي الواحد.

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = PmK = 5L + 14K$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'_L(tL,tK) = 5tL + 14tK = t(5L+14K) = t^1(PmK)$$

إذن مشتق دالة الإنتاج بالنسبة للعمل Pmk، هي دالة متجانسة ودرجة تجانسها تساوي الواحد.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 L} = 6, \forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f''_L(tL,tK) = 6t^0 = 6$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 K} = 14, \forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f''_K(tL,tK) = 14t^0 = 14$$

نلاحظ أن f''_L و f''_K يشكلان دالتان متجانستان من الدرجة 0 حيث أنه إذا تغيرت عوامل الانتاج بنسبة متساوية فإن الناتج الحدي للعنصر الإنتاجي لا يتغير.

نلاحظ كذلك أن نواتجها الحدية ثابتة (للدوال المتجانسة من الدرجة 0) $\left[\frac{PmK}{PmL} = \frac{6}{14}\right]$ ولما كانت النسبة تعبر علن معدل الإحلال الفني لعناصر الإنتاج فإن هذا الأخير يكون ثابتا.

***دوال الإنتاج لـــ كوب–دوقلاس: "Cobb-Douglas"**

ثم اكتشافها عام 1928 م من طرف الاقتصاديين cobb وDouglas، وتعتبر من أشهر الدوال المستعملة في تحليل الإنتاج وتكتب على الشكل التالي: $Q = AL^{\alpha}.K^{\beta}$

حيث: Q، تمثل كمية الإنتاج المنتجة، A، عدد ثابت موجب، α، β، قيم ثابتة.

ملاحظة

دوال كوب–دوقلاس هي دوال متجانسة من الدرجة : (β+α) لأن:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(tL,tK) = A(tL)^{\alpha}.(tK)^{\beta} = At^{\alpha}L^{\alpha}t^{\beta}K^{\beta} = t^{\alpha+\beta}.ALK = t^{\alpha+\beta}Q$$

بالنسبة لغلة الحجم أو مردودية السلم يتم تحديدها من خلال درجة التجانس حيث إذا كان:

- α+β = 1 غلة حجم ثابتة؛
- α+β>1 غلة حجم متناقضة؛
- α+β < 1 غلة حجم متزايدة.