حلول السلسلة الثانية

حل التمرين الأول

- إيجاد تقدير نقطة لمتوسط المقاعد الشاغرة:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 15$$

- إيجاد تقدير فترة ثقة 99٪ لمتوسط الأماكن الشاغرة:

σ مجهول و $n > 30$ ومنه حسب نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو:

$$\left[\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

لدينا:

$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو:

$$\left[15 - 1.96\frac{5}{\sqrt{100}}, 15 + 1.96\frac{5}{\sqrt{100}}\right] = [14,16]$$

حل التمرين الثاني

ليكن المتغير العشوائي X يمثل أرصدة دفاتر البريد.

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$$

σ مجهول و $n < 30$ ومنه:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

لدينا:

$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = 2.262$$

ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو:

$$\left[3500 - 2.262\frac{400}{\sqrt{25}}, 3500 + 2.262\frac{400}{\sqrt{25}}\right] = [3319.04,3680.96]$$

حل التمرين الثالث

لدينا خطأ المعاينة هو:

$$\mathrm{d} = \pm \mathrm{Z}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} = \pm 20$$

ومنه حجم العينة المناسب لتحقيق هذا الحد هو:

$$\mathrm{n} = \left(\frac{(1.96 \times 40)}{20}\right)^2 \Longrightarrow \mathrm{n} = 15$$

حل التمرين الرابع

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل عمر المصابيح من نوع A.

$$\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$$

ليكن المتغير العشوائي Y_i يمثل عمر المصابيح من نوع B.

$$\mathrm{Y} \rightsquigarrow \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$$

σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان و $n_1 , \mathrm{n}_2 < 30$ ومنه:

$$\mathrm{T} = \frac{(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\mathrm{S_P}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}}} \rightsquigarrow \mathrm{t}_{\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2-2}$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط و التحويل هو:

$$\left[(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}) - \mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{S_P}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}}, (\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}) + \mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{S_P}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}}\right]$$

لدينا:

$$1 - \alpha = 0.99 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2-2} = 2.861$$
$$S_P^2 = 13241.10$$

ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 99٪ هو:

$$[230 - (2.861)(115.07)(0.48), 230 + (2.861)(115.07)(0.48)] = [71.79,388.02]$$

حل التمرين الخامس

حجم العينة $n = 200 > 30$ ومنه حسب نظرية النهاية المركزية:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

إذن مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

لدينا:

$$\hat{p}=\frac{25}{200}=0.125$$
$$1-\alpha=0.99 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2.326$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[0.125-2.326\sqrt{\frac{0.125\times 0.875}{200}}, 0.125+2.326\sqrt{\frac{0.125\times 0.875}{200}}\right]=[0.071,0.178]$$

حل التمرين السادس

لدينا:

$$\hat{p}_1=\frac{240}{500}=0.48$$
$$\hat{p}_2=\frac{150}{250}=0.6$$
$$1-\alpha=0.90 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.95 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.645$$
$$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ويمكن تعين مجال ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}, (\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة الثقة بمعامل ثقة 90٪ للفرق بين نسبتي السيارات التي تحتاج إلى إصلاحات هو:

$$[-0.182,-0.058]$$

حل التمرين السابع

$$1-\alpha=0.99 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.995 \Longrightarrow f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}=f_{0.995,8,7}=8.68$$

$$1-\alpha=0.99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0.005 \Longrightarrow f_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}=f_{0.025,8,7}=0.13$$

$$S_1^2=0.81$$

$$S_2^2=1.31$$

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F_{n_1-1,n_2-1}$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة تباييني مجتمعين بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_1^2}{S_2^2 f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة بمعامل ثقة 99٪ لتقدير $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو:

$$[0.07,4.73]$$

بما أن مجال الثقة بمعامل ثقة 99٪ لتقدير $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ يتضمن القيمة 1 فلا يوجد دليل كاف لاعتبار الآلتين مختلفتين.

حل التمرين الثامن

قبل التدريب	8	7	4	10	4
بعد التدريب	7	5	6	7	3
d_i	1	2	2−	3	1

$$n=5<30$$

ومنه:

$$T=\frac{\overline{D}-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

أي أن مجال الثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[\overline{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}, \overline{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة هو:

$$\left[1 - (2.776)\frac{1.87}{\sqrt{5}}, 1 + (2.776)\frac{1.87}{\sqrt{5}}\right] = [-1.32\ , 3.32]$$

حيث:

$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow t_{0.975,4} = 2.776$$

$$\overline{D} = \frac{\sum d_i}{n} = 1$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \overline{D})^2}{n-1}} = 1.87$$