# حلول السلسلة الأولى

**حل التمرين الأول**

في هذا التمرين المفردة محل الدراسة هي الثانوية، والمتغير محل الدراسة $X$ هو عدد المدرسين في الثانوية، وبما أن قيم المتغير لجميع مفردات المجتمع هي عدد المدرسين لجميع الثانويات، فالبيانات المذكورة هي بيانات المجتمع والتوزيع الإحتمالي للمتغير $X$ هو التوزيع الإحتمالي للمجتمع، وبما أن المتغير $X$ متغير عشوائي منفصل، فبحساب دالة كثافة الإحتمال $f(x)$ لكل قيمة من قيم المتغير نحصل على توزيع المجتمع والموضح في الجدول الموالي:

| $x$ | 40 | 42 | 43 | 56 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

من الجدول نحسب الوسط الحسابي لهذا المجتمع باستعمال الصيغة التالية:

$$\mu = \sum xf(x) = 50$$

أما تباين المجتمع فيحسب باستعمال الصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \sum xf(x) - \mu^2 = 80$$

2- إذا سحبنا من هذا المجتمع مع الإرجاع كل العينات الممكنة ذات الحجم $n = 2$، والتي يساوي عددها $N^n = 25$ ، وحسبنا لكل عينة وسطها الحسابي $\bar{X}$ سنحصل على النتائج الموضحة في الجدول الموالي:

| العينة | $\bar{X}$ | العينة | $\bar{X}$ | العينة | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 40 | 40 | 42 64 | 53 | 56 56 | 56 |
| 40 42 | 41 | 48 40 | 44 | 56 64 | 60 |
| 40 48 | 44 | 48 42 | 45 | 64 40 | 52 |
| 40 56 | 48 | 48 48 | 48 | 64 42 | 53 |
| 40 64 | 52 | 48 56 | 52 | 64 48 | 56 |
| 42 42 | 41 | 48 64 | 56 | 64 56 | 60 |
| 42 40 | 42 | 56 40 | 48 | 64 64 | 64 |
| 42 48 | 45 | 56 42 | 49 | | |
| 42 56 | 49 | 56 48 | 52 | | |

توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ في حالة السحب مع الإرجاع.

| $\bar{X}$ | 40 | 41 | 42 | 44 | 45 | 48 | 49 | 52 | 53 | 56 | 60 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\bar{X})$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |
| $\bar{X}f(\bar{X})$ | $\frac{40}{25}$ | $\frac{82}{25}$ | $\frac{42}{25}$ | $\frac{88}{25}$ | $\frac{90}{25}$ | $\frac{144}{25}$ | $\frac{98}{25}$ | $\frac{208}{25}$ | $\frac{106}{25}$ | $\frac{168}{25}$ | $\frac{120}{25}$ | $\frac{64}{25}$ |

$$E(\overline{X}) = \mu = 50$$
$$V(\overline{X}) = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = 40$$

بمقارنة النتائج التي حصلنا عليها نلاحظ أن الوسط الحسابي للمتوسطات الحسابية المحسوبة من كل العينات العشوائية البسيطة ذات الحجم $n = 2$ يساوي الوسط الحسابي لتوزيع المجتمع الذي سحبت منه هذه العينات وأن تباين المتوسطات الحسابية لهذه العينات يساوي تباين المجتمع على حجم العينة.

**حل التمرين الثاني**

ليكن المتغير العشوائي $X_i$ نقاط الطلبة في مقياس الإحصاء.

$$X \backsim N(\mu, \sigma)$$
$$X \backsim N(12,5)$$

لدينا:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب:

$$\begin{aligned}
P(11 \le \overline{X} \le 14) &= P(\overline{X} \le 14) - P(\overline{X} \le 11) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{14 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{11 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(Z \le \frac{14 - 12}{5/\sqrt{49}}\right) - P\left(Z \le \frac{11 - 12}{5/\sqrt{49}}\right) \\
&= P(Z \le 2.81) - P(Z \le -1.40) \\
&= P(Z \le 2.81) - [1 - P(Z \le 1.40)] \\
&= 0.9975 - 1 + 0.9192 = 0.9167
\end{aligned}$$

**حل التمرين الثالث**

ليكن المتغير العشوائي $X_i$ يمثل المصروف الشهري للطالب.

$$X \backsim N(\mu,\sigma)$$
$$X \backsim N(40,\sigma)$$

لدينا $\sigma$ مجهول و $n \geq 30$ ومنه:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب:

$$P(\overline{X} > 42) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} > \frac{42-\mu}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{42-40}{7/\sqrt{49}}\right)$$
$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

**حل التمرين الرابع**

ليكن المتغير العشوائي $X_i$ يمثل أوزان الأطفال حديثي الولادة.

$$X \backsim N(\mu,\sigma)$$
$$X \backsim N(2.9,\sigma)$$

لدينا $\sigma$ مجهول و $n < 30$ ومنه:

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \backsim t_{n-1}$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب:

$$P(\overline{X} > 3.1) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} > \frac{3.1-\mu}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(T > \frac{3.1-2.9}{0.6/\sqrt{9}}\right) = P(T > 1)$$
$$= 1 - P(T \leq 1) = 1 - 0.85 = 0.15$$

**حل التمرين الخامس**

ليكن المتغير العشوائي $X_i$ يمثل رصيد الحساب الجاري.

لدينا:

$\sigma$ معلوم ومنه حسب نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب:

$$P(\overline{X} > 600) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{600-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{600-500}{200/\sqrt{36}}\right) \qquad = P(Z > 3)$$
$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

**حل التمرين السادس**

ليكن المتغير العشوائي $X_i$ يمثل الأجر اليومي للعامل في الشركة الأولى.

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$$
$$X \sim N(5, 0.7)$$

ليكن المتغير العشوائي $Y_i$ يمثل الأجر اليومي للعامل في الشركة الثانية.

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$
$$Y \sim N(4, 0.5)$$

$\sigma_1^2$ و $\sigma_2^2$ معلومان ومنه:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

والاحتمال المطلوب هو:

$$P(\overline{X} - \overline{Y} \leq 0.75) = P\left(\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{0.75 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$$
$$= P\left(Z \leq \frac{0.75 - (5-4)}{\sqrt{\frac{0.5}{20} + \frac{0.25}{10}}}\right)$$
$$= P(Z \leq -1.113) = 1 - P(Z \leq 1.113)$$
$$= 1 - 0.8665 = 0.1335$$

**حل التمرين السابع**

الصفة المدروسة هي مطابقة الإنتاج للمواصفات.

$n \geq 30$ ومنه حسب نظرية النهاية المركزية:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

حساب احتمال أن تكون نسبة العينة في حدود 0.05 من نسبة المجتمع:

$$
\begin{aligned}
P(0.85 \leq \hat{p} \leq 0.95) &= P(\hat{p} \leq 0.95) - P(\hat{p} \leq 0.85) \\
&= P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{0.95-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) - P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{0.85-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) \\
&= P(Z \leq 1.66) - P(Z \leq -1.66) \\
&= P(Z \leq 1.66) - [1 - P(Z \leq 1.66)] \\
&= 0.903
\end{aligned}
$$

**حل التمرين الثامن**

لدينا:

$$\widehat{P_1} \backsim N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}}\right)$$

$$\widehat{P_2} \backsim N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2 q_2}{n_2}}\right)$$

ومنه:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$$

والاحتمال المطلوب هو:

$$
\begin{aligned}
P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq 0.2) &= P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0.2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}\right) \\
&= P\left(z \leq \frac{0.2 - (0.7 - 0.65)}{\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{30} + \frac{0.65 \times 0.35}{35}}}\right) \\
&= P(Z \leq 1.29) = 0.9015
\end{aligned}
$$

**حل التمرين التاسع**

لدينا:

$$\frac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{S}^2}{\sigma^2} \backsim \lambda^2_{\mathrm{n}-1}$$

ومنه يحسب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}^2 \leq 15) = \mathrm{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{15(n-1)}{\sigma^2}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\lambda^2 \leq \frac{15(20-1)}{9}\right)$$
$$= \mathrm{P}(\lambda^2 \leq 31.66) = 0.75$$

**حل التمرين العاشر**

نعلم أن:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\mathrm{S}_2^2 / \sigma_2^2} \backsim \mathrm{F}_{\mathrm{n}_1-1,\mathrm{n}_2-1}$$

وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب:

$$P(\mathrm{S}_1^2 > 2\mathrm{S}_2^2) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_1^2}{\mathrm{S}_2^2} > 2\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\mathrm{S}_2^2 / \sigma_2^2} > 2\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\mathrm{F}_{7,9} > 3.6\right) \qquad = 0.036$$