Centre Universitaire de Mila | Année universitaire 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie | Semestre II

Domaine: LMD-Math (1^er^ année) | Durée 1 h 30

Analyse 2 | 18/06/2023

Examen de rattrapage

> **Note:** *Aucun document n'est autorisé.*

Exercice 1: (8 *pts*)

1) Calculer les primitives suivantes:

$$I_1 = \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx, \quad I_2 = \int \frac{x}{x^3-3x+2}dx, \quad I_3 = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$$

1,5   2   2

2) Calculer la limite de suite suivante:

$$u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\,.....\,(n+n)}.$$

2,5

Exercice 2: (7 *pts*)

1) En utilisant le développement de Maclaurin de la fonction $\ln(x+1)$.

a- Montrer que: $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x.$ 2

b- Trouver la limite de la suite (u_n) définie par: $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$ 3

2) Montrer que:

$$Arc\tan x + Arc\tan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \forall x < 0.$$

2

Exercice 3: (5 *pts*)

1) Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $xy' + y = y^2 \ln x.$ 2,5

b) $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x.$ 2,5

Bon Courage

Centre Universitaire de Mila

Analyse II — Semestre II

Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice 01 :

1) * $I_1=\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$, on pose $t=\arctan x \Rightarrow dt=\frac{1}{1+x^2}dx$, (0.5)

alors : $I_1=\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$ (0.5) (0.5)

* $I_2=\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{a(x-1)^2+b(x+2)(x-1)+c(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} \quad (0.5)$$

$$=\frac{ax^2-2ax+a+bx^2+bx-2b+cx+2c}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b+c=1 \\ a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{2}{9},\ b=\frac{2}{9},\ c=\frac{1}{3}, \text{ donc} \quad (0.5)$$

$$I_2=\int\frac{x}{(x+2)(x-1)^2}dx=-\frac{2}{9}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx \quad (0.5)$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x+2|+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)}+C$$

$$=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C \quad (0.5)$$

* $I_3=\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx$, on pose $t=e^x \Rightarrow x=\ln t \Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$ (0.5)

$$I_3=\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int\frac{t-1}{t+1}\frac{dt}{t}=\int\frac{t-1}{(t+1)t}dt$$

$$\frac{t-1}{t(t+1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}\overset{(0.5)}{=}\frac{at+a+bt}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}, \text{ donc}$$

$$I_3=\int\frac{t-1}{t(t+1)}dt=-\int\frac{1}{t}dt+2\int\frac{1}{t+1}dt \quad (0.5)$$

$$=-\ln|t|+2\ln|t+1|+C=-\ln e^x+2\ln(e^x+1)+C \quad (0.5)$$

$$=-x+2\ln(e^x+1)+C.$$

2) $U_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\times\cdots\times(n+n)} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}}$

$= \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\times\left(\frac{n+2}{n}\right)\times\left(\frac{n+3}{n}\right)\cdots\times\left(\frac{n+n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\times\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ 0.5 ; On pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Alors, $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$ 0.5

où $f(x) = \ln(1+x)$ (I.p.p)

$\begin{cases} U = \ln(1+x) \\ V' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{1+x} \\ V = x \end{cases}$ 0.5 , Donc

$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\,dx$ 0.5

$= \ln 2 - x\Big]_0^1 + \ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1$

Alors: $\lim_{n\to+\infty} V_n = 2\ln 2 - 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = e^{2\ln 2 - 1}$. Alors

$\lim_{n\to+\infty} U_n = e^{\ln 2^2}\cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$ 0.5

Exercice 02:

1) Montrer que: $\forall x>0,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

On a: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1$

$\Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + (-1)^n\frac{1}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(\theta x+1)^{n+1}}$

* formule Mac laurin d'ordre 2 est:

$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{x^3}{(\theta x+1)^3}$ 0.5 $,\ 0<\theta<1$

On a: $\frac{1}{3}\frac{x^3}{(\theta x+1)^3} > 0$ 0.5 (car $x>0$ et $0<\theta<1$) $\Rightarrow$

$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{x^3}{(\theta x+1)^3} > x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$

$\ln(x+1) > x - \frac{1}{2}x^2 \ldots$ (1)

* formule Mac Laurin d'ordre 1 et :

$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(\theta x+1)^2}$ 0.5 , $0<\theta<1$

On a : $-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(\theta x+1)^2} < 0$ 0.5 $\Rightarrow x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(\theta x+1)^2} < x$

$\Rightarrow \ln(1+x) < x$ --- (2)

de (1) et (2) $\Rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x \quad , \forall x>0$

b) Calcule la limite de $U_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $V_n = \ln U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'après la question (a) : $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2} \Rightarrow$

$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ 0.5 $< \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$.

On a : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$ 0.5 $= \frac{n(n+1)}{2n^2}$, et on a :

$k \le n \Rightarrow k^2 \le n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 \le \sum_{k=1}^{n} n^2 = n n^2 \Rightarrow$

$-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ 0.5 $\ge -\frac{n^3}{2n^4} = -\frac{1}{2n}$. Alors :

$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n} < V_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{n(n+1)}{2n^2} \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n}\right)}_{\frac{1}{2}} < \lim_{n\to+\infty} V_n$ 0.5 $< \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$ 0.5 $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = e^{\frac{1}{2}}$ 0.5

2) Montrer que : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \; x<0$

Soit $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ 0.5 , $\forall x<0$

On a : $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ 0.5 $= 0$. Donc

$\forall x<0, \; f'(x) = 0 \Rightarrow f$ est constante $\forall x<0$ 0.5

En calculant $f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1)$ 0.5

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. Alors

$\forall x<0, \; \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 03:

a) $xy' + y = y^2 \ln x \Rightarrow x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \ln x$.

On pose $z = \frac{1}{y}$ 0.1 $\Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow -xz' + z = \ln x$ --- (E)

Résoudre l'équation homogène associée à (E):

$-xz' + z = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln x + c \Rightarrow z_H = Kx,\ K = cte$ 0.1

On recherche une solution z_p:

$z_p = K(x)\,x \Rightarrow z_p' = K'(x)\,x + K(x)$. Remplaçons z_p et z_p' dans (E), on obtient:

$-K'(x)x^2 - \cancel{xK(x)} + \cancel{xK(x)} = \ln x \Rightarrow -K'(x)x^2 = \ln x$

$\Rightarrow K'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow K(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ (Ipp)

$\begin{cases} U' = -\frac{1}{x^2}dx \\ V = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{1}{x} \\ V' = \frac{dx}{x} \end{cases}$, donc

$K(x) = \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow$

$z_p = \ln(x) + 1$ 0.1. Alors $z = z_H + z_p = K.x + \ln(x) + 1$ 0.1

$\Rightarrow \frac{1}{y} = K.x + \ln(x) + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{K.x + \ln(x) + 1}$, $K \in \mathbb{R}$. 0.1

b) $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$ --- (E2)

$y'' - 3y' + 2y = 0$. On pose $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ et

$y'' = r^2e^{rx} \Rightarrow r^2e^{rx} - 3re^{rx} + 2e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$, 0.1 $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.

Alors $y_H = c_1e^x + c_2e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 0.5

* La solution y_p de la formule $y_p = a\sin x - b\cos x$ 0.1

$\Rightarrow y_p' = a\cos x - b\sin x$ et $y_p'' = -a\sin x - b\cos x$

remplaçons y_p, y_p' et y_p'' dans (EQ) :

$-a\sin x - b\cos x - 3a\cos x + 3b\sin x + 2a\sin x + 2b\cos x$
$= 10\sin x$

$\Rightarrow \sin x \cdot (+a+3b) + \cos x \cdot (b-3a) = 10\sin x$

$\Rightarrow \begin{cases} a+3b=10 \\ b-3a=0 \end{cases} \Rightarrow a=1$ et $b=3$. Alors

$y_p = \sin x + 3\cos x$. Donc

$y = y_H + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \sin x + 3\cos x$.

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

0,5

0,5