Centre Universitaire de Mila — Année universitaire 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie — Semestre I

Domaine: LMD-Math (1$^{\text{er}}$année) — Durée 1h 30

Analyse I — Examen de rattrapage — 12/06/2023

Exercice 1: (8 pts)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$, et par la relation: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1) Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$ 1

2) Montrer que si $n \geq 1$, alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. 2

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$. 2

4) En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} + \sqrt{a})(u_{n+1} - \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$. 2

5) Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que: $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$. 1

Exercice 2: (7 pts)

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \alpha x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$. 2

2) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. 2,5

3) la fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$. 2,5

Exercice 3: (5 pts)

1) Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $B \subset A$. Montrer que:

i) A borné $\Longrightarrow B$ borné. 1

ii) $\sup(A) \geq \sup(B)$. 2

2) On suppose que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. 2

Bon Courage

Centre Universitaire de Mila

Domaine : LMD-Math Analyse I

Corrigé de l'examen de Rattrapage

Exercice 01 :

1) Montrer que : $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$

$U_{n+1}^2 - a = \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{U_n^2 + a}{U_n}\right)^2 - a$

$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^4 + 2aU_n^2 + a^2 - 4aU_n^2\right)$

$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^4 - 2aU_n^2 + a^2\right) = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$ (1)

2) il est clair que pour $n \geq 0$, on a : $U_n > 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geq 0$, $U_{n+1}^2 - a \geq 0$ et comme $U_{n+1} > 0$, alors $U_{n+1} \geq \sqrt{a}$. (0,5)

* Soit $n \geq 1$, Calculons le quotient de U_{n+1} par U_n :

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{U_n^2}\right)$ (0,5) or $\frac{a}{U_n^2} \leq 1$ car $U_n \geq \sqrt{a}$.

Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ (0,5) $\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$, $\forall n \geq 1$. (0,5)

Alors la suite (U_n) est décroissante.

3) La suite (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. (1)

D'après la relation $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$ quand $n \to +\infty$ alors $U_n \to \ell$ et $U_{n+1} \to \ell$ donc :

$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell^2 + a}{\ell}\right) \Rightarrow$

$\ell^2 + a - 2\ell^2 = 0$ (1) $\Rightarrow \ell^2 = a \Rightarrow \ell = \sqrt{a}$.

Alors (U_n) converge vers $\sqrt{a}$.

4) $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2} \Rightarrow (U_{n+1} - \sqrt{a})(U_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2 (U_n + \sqrt{a})^2}{4U_n^2}$ (0,5)

$\Rightarrow U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2 (U_n + \sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{1}{U_{n+1} + \sqrt{a}}$

$$= \frac{(U_n-\sqrt{a})^2(U_n+\sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{U_n^2+a}{U_n}\right)+\sqrt{a}}$$ 0.5

$$= \frac{(U_n-\sqrt{a})^2(U_n+\sqrt{a})^2}{\cancel{4}U_n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{2U_n}}{U_n^2+a+2\sqrt{a}U_n}$$

$$= \frac{(U_n-\sqrt{a})^2\cancel{(U_n+\sqrt{a})^2}}{2U_n} \cdot \frac{1}{\cancel{(U_n+\sqrt{a})^2}} = \frac{(U_n-\sqrt{a})^2}{2U_n}$$ 0.5

On a : $U_n > \sqrt{a} \implies \frac{1}{2U_n} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$, donc

$\frac{(U_n-\sqrt{a})^2}{2U_n} < \frac{(U_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$. Alors :

$$U_{n+1}-\sqrt{a} \leq \frac{(U_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$ 0.5

5) Par récurrence pour $n=1$, $U_1-\sqrt{a} \leq k$ si la proposition est vraie rang n. Alors :

$$U_{n+1}-\sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(U_n-\sqrt{a})^2$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2$$

$$\leq \frac{(2\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2$$ 1

$$\leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Exercice 02 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Continuité de f sur $\mathbb{R}$:

* Si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ (rapport de deux fonctions continues). 0.5

* Si $x > 0$, $f(x) = \alpha x$ est continue sur $]0, +\infty[$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (fonction polynômiale). 0.5

* Si $x = 0$, on a :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0)$, et 0,5

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \alpha x = 0 = f(0)$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Donc

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. 0,5

Alors $f(x)$ est continue en 0. D'où la continuité de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$: 0,5

* Si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$
* Si $x > 0$, $f(x) = \alpha x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 0,5
* Si $x = 0$, On a :

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\alpha x - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$, 0,5

et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$ 0,5

f est dérivable en $x = 0$ si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. 0,5 Alors f est dérivable en $x = 0$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

On déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

3) La fonction dérivée f' est :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

0,5

* Si $x \leq 0$, $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ est continue sur $]-\infty, 0]$. 0,5
* Si $x \geq 0$ $f'(x) = \frac{1}{2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ 0,5
* Si $x = 0$, on a : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} = f'(0)$ 0,5

et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$, donc

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = \frac{1}{2}$.

Alors f est elle de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

1) i) Montrer que : A borné $\Rightarrow$ B borné ;

B borné $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in B, m \leq x \leq M$

On a : A borné $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \leq M$

et on a : $B \subset A$ donc $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in B$; $m \leq x \leq M$, alors B borné.

ii) Montrer que : $\sup A \geq \sup B$

On a : A et B borné donc $\sup A$ et $\sup B$ existent

Soit $x \in B \Rightarrow x \in A$ mais A majoré $\Rightarrow$ $x \leq \sup A$, alors $\sup A$ est majorant de B

et on a : B majoré c'est-à-dire $\sup B$ est le plus petit des majorants de B. Alors

$\sup B \leq \sup A$

2) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$:

On suppose que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Alors $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3} \Rightarrow 2 = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{3}\right)^2$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{3} + 3 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{q}{2p}\left(\frac{p^2}{q^2} + 1\right)$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{q}{2p}\left(\frac{p^2 + q^2}{q^2}\right) \in \mathbb{Z}$, $\in \mathbb{Z}^*$ (car $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$)

alors $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction avec $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.